Gesellschaft für
Reaktorsicherheit (GRS) mbH

GRS-Bericht

Ein statisch exaktes, rotationssymmetrisches finites Schalen-Element unter Berücksichtigung des zweidimensionalen Spannungszustandes

B. Österle

GRS-3 (November 1977)

Gesellschaft für Reaktorsicherheit (GRS) mbH

GRS-Bericht

Ein statisch exaktes, rotationssymmetrisches finites Schalen-Element unter Berücksichtigung des zweidimensionalen Spannungszustandes

Bernd Österle

GRS-3 (November 1977)

Glockengasse 2 · 5000 Köln 1 · Telefon (02 21) 20 68–1 · Telex 8 881 807 grs d

Kurzfassung

Die mit der Methode der Finiten Elemente in der Strukturmechanik erzielbaren Ergebnisse sind bis auf wenige Ausnahmen Näherungen. Exakte Ergebnisse erhält man für statische Probleme bei Verwendung von Zug-Druck-, Torsions- und Biegestäben, da die bei diesen Elementen verwendeten Verschiebungsansätze identisch sind mit der Lösung der Differentialgleichung für die Verformung als Folge statischer Lasten. In diesem Bericht soll ein weiteres Element, basierend auf der Theorie der rotationssymmetrischen, dünnen Schalen, vorgestellt werden, das ebenfalls statisch exakte und dynamisch sehr gute Ergebnisse liefert.

Abstract

Structure mechanic calculations which are based on the method of finite elements, lead to an approximative solution of the problem of interest in nearly all cases. Nevertheless, some few elements deliver exact static solutions, e.g. the bar and the beam element including bending, shearing and twisting theory, since the assumed displacements are identical with the solution of the differential equation of the static problem. This paper introduces another finite element, which is based on the theory of thin shells and yields exact static and very accurate dynamic results.

INHALTSVERZEICHNIS

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

TABELLENVERZEICHNIS

FORMELZEICHEN

A	Verknüpfungsmatrix
B	Störmatrix
B	Verknüpfungsmatrix
B^*	Verknüpfungsmatrix
C	Vektor der Integrationskonstanten
C_1 bis C_6	Integrationskonstanten
D	Dehnsteifigkeit
E	Elastizitätsmodul
F	Vektor der Störkräfte
F	Ortsfunktion
F_{Nx}, F_{Qx}, F_{Ny}	Schnittkräfte
G	Zeitfunktion
K	Biegesteifigkeit
M	Massenmatrix
M_x	Schnittmoment
P	Dämpfungsmatrix
Q	Steifigkeitsmatrix
R	Radius
S	Vektor der Schnittkräfte
S_1 bis S_6	Schnittkräfte
U	Verschiebungsvektor
V	Verschiebungsvektor
a	Verknüpfungsmatrix
h	Wandstärke
k	bezogene Größe
l	Elementlänge
p	Druck
r	Radialkoordinate
u, u_o	Längsverschiebung
w	Radialverschiebung
x	Längskoordinate

α	bezogene Größe
β	bezogene Größe
$\varepsilon_x, \varepsilon_\phi$	Dehnungen
ν	Querkontraktionszahl
ρ	Dichte
σ_x, σ_ϕ	Spannungen
ΦdS	Oberflächenkraft
ω	Eigenfrequenz

1. EINLEITUNG

Bei der Berechnung des statischen und dynamischen Verhaltens von Strukturen mit der Methode der Finiten Elemente werden mit wenigen Ausnahmen Elemente verwendet, die nicht nur für dynamische, sondern auch für statische Probleme Näherungslösungen liefern. Statisch exakte Ergebnisse kann man bei der Verwendung von Zug-Druck-Stäben und Biegebalken im Rahmen der angewendeten Statiktheorie erzielen. Alle anderen Elemente liefern Näherungswerte, wobei die erzielbare Genauigkeit im allgemeinen mit der Zahl der verwendeten Elemente bis zu einer gewissen Grenze zunimmt (Abnahme des Diskretisierungsfehlers) und bei weiterer Vergrößerung der Elementzahl wieder abnimmt (Überkompensation des kleiner werdenden Diskretisierungsfehlers durch den größer werdenden Fehler der numerischen Berechnung der Lösung).

Dynamisch exakte Ergebnisse sind nie erreichbar, da zur Lösung nicht von den partiellen Differentialgleichungen des dynamischen Strukturverhaltens ausgegangen wird, sondern zur Herleitung sowohl des Steifigkeits- als auch des Trägheitsverhaltens Verschiebungsansätze Verwendung finden, die der Statik entspringen /1, 2/.

In dieser Arbeit soll ein weiteres statisch exaktes Element vorgestellt werden, welches auch sehr gute dynamische Eigenschaften aufweist. Es handelt sich hierbei um ein rotationssymmetrisches Schalenelement, welches von der Theorie der dünnen Schalen ausgeht und besonders zur Berechnung der Auswirkung von rotationssymmetrischen, dynamischen Druckbelastungen auf röhren- und zylinderförmige Strukturen geeignet ist. Das Element ist im folgenden "ROTSYM" genannt worden.

Angewendet wurde das Element bisher bei der Berechnung von postulierten Reaktorunfällen, u.a. auch unter der Berücksichtigung der gegenseitigen Beeinflussung von Struktur und Fluid /3/.

2. HERLEITUNG DER MASSEN-, STEIFIGKEITS- UND STÖRMATRIX

Zur Lösung statischer Probleme als Folge einer verteilten Druckbelastung muß die Gleichung

$$QU = F = Bp, \qquad (1)$$

zur Lösung dynamischer Probleme die Gleichung

$$M\ddot{U} + P\dot{U} + QU = F(t) = Bp(t) \qquad (2)$$

M = Massenmatrix
P = Dämpfungsmatrix
Q = Steifigkeitsmatrix
B = Störmatrix
F = Vektor der Störkräfte
U = Verschiebungsvektor
p = Druck- (Stör-) Vektor

gelöst werden. Die in diesem Kapitel herzuleitenden Matrizen M, Q und B (P folgt aus M, Q und gewissen Annahmen über das Dämpfungsverhalten) gehen von der Theorie der dünnen Schalen aus /4, 5/; das bedeutet, die üblichen Knoten in der Finite-Elemente-Methode entsprechen der kreisförmigen Wandstärkemittellinie an den Elementerändern. Der Verschiebungsvektor U enthält somit die rotationssymmetrischen Verformungen der Wandstärkemittellinien an den Rändern der einzelnen Elemente. Neben der Schalentheorie wird vorausgesetzt, daß der Verlauf des Druckes p (genauer des Differenzdruckes Δp zwischen innen und außen) über einem Element einen linearen Verlauf haben soll.

2.1 Herleitung der Steifigkeitsmatrix

Betrachtet werden dünne Kreiszylinderschalen unter rotationssymmetrischer Belastung. Ausgangspunkt aller Herleitungen der charakteristischen Größen eines Elements ist die Bestimmung der Steifigkeitseigenschaften. Von den meist verwendeten Herleitungsmethoden wie

- Einheits-Verschiebungs-Satz
- Satz von Castigliano
- Lösung der Differentialgleichung für die Element-Verschiebung
- Invertierung der Verschiebungs-Kraft-Verhältnisse

wird die Lösung der Differentialgleichung verwendet, die, vorausgesetzt, daß eine solche Lösung existiert, statisch exakte und dynamisch sehr gute Ergebnisse bei der Beschränkung auf relativ wenige Freiheitsgrade der zu idealisierenden Struktur liefert.

Die in der folgenden Herleitung verwendeten Bezeichnungen für Verschiebungen, Schnittkräfte und auch die Abb. 1 und 2 werden aus /4/ übernommen.

2.1.1 Lösung der Verschiebungs-Differentialgleichung

a) Gleichgewichtsbedingungen

Mit den am Volumenelement $dxR\,d\varphi h$ in Abb. 1 eingetragenen Schnittgrößen je Längeneinheit und einem Innendruck $p(x)$ lassen sich die folgenden drei Gleichgewichtsbedingungen aufstellen:

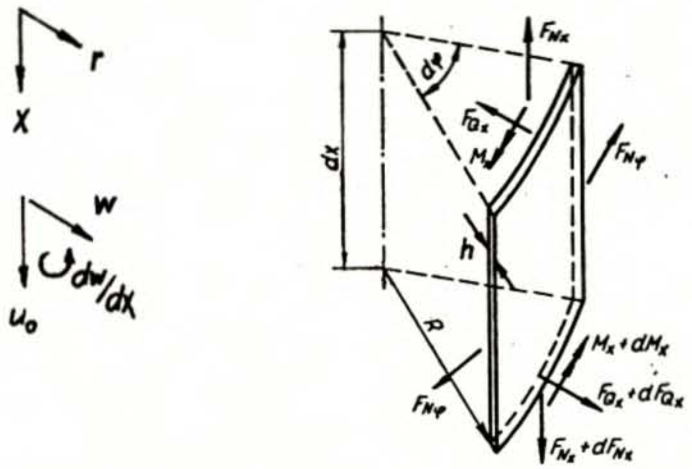


Abb. 1: Gleichgewichtsbedingungen

Kräftegleichgewicht in x-Richtung:

$$dF_{Nx} = 0 \tag{3}$$

Kräftegleichgewicht in radialer Richtung:

$$(F_{Qx} + dF_{Qx})\,Rd\varphi - F_{Qx}\,Rd\varphi - F_{N\varphi}\,dx\,d\varphi + p(x)\,R\,dx\,d\varphi = 0$$

$$\frac{dF_{Qx}}{dx} - \frac{1}{R}F_{N\varphi} + p(x) = 0 \tag{4}$$

Momentengleichgewicht:

$$(M_x + dM_x)\,Rd\varphi - M_x\,Rd\varphi - F_{Qx}\,R\,dx\,d\varphi = 0$$

$$\frac{dM_x}{dx} - F_{Qx} = 0 \tag{5}$$

Zur Bestimmung der vier unbekannten Schnittgrößen stehen nur drei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung. Aus der ersten Bedingung folgt

$F_{Nx} = konst.,$

und die beiden anderen Beziehungen können zusammengefaßt werden zu

$$M_x'' - \frac{1}{R} F_{N\varphi} + p(x) = 0. \tag{6}$$

b) Formänderungsbetrachtung und Hookesches Gesetz

Zur Beschreibung des Verformungszustandes werden folgende Größen eingeführt:

u Verschiebung in x-Richtung
w Verschiebung in r-Richtung

Aus Symmetriegründen kann eine Verschiebung in φ-Richtung nicht auftreten. Zwischen den Verschiebungen und Dehnungen besteht folgender Zusammenhang (Abb. 2):

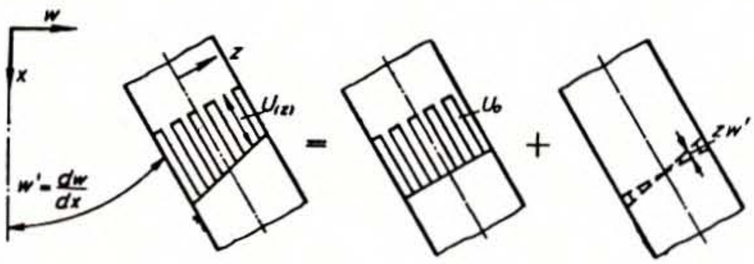


Abb. 2: Zusammenhang zwischen Biegung und Zug

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{du_0}{dx} - zw'' \qquad [u(z) = u_0 - zw']$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{w}{r} = \frac{w}{R+z} \approx \frac{w}{R} - w\frac{z}{R^2} \qquad (\text{wegen } z \ll R) \tag{7}$$

Die Dehnungen setzen sich aus einem reinen Zuganteil und aus einem Biegeanteil zusammen (Abb. 2). Zwischen den Verschiebungen und den Spannungen besteht über das Hookesche Gesetz der Zusammenhang

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\varphi\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\left[u_0' + \nu\frac{w}{R} - z\left(w'' + \nu\frac{w}{R}\right)\right]$$
$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_\varphi + \nu\varepsilon_x\right) \quad \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{w}{R} + \nu u_0' - z\left(\frac{w}{R^2} + \nu w''\right)\right], \tag{8}$$

so daß man für die Schnittgrößen schreiben kann

$$F_{Nx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(u_0' + \nu\frac{w}{R}\right) = D\left(u_0' + \nu\frac{w}{R}\right) \tag{9}$$

$$F_{N\varphi} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\varphi dz = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{w}{R} + \nu u_0'\right) = D\left(\frac{w}{R} + \nu u_0'\right) \tag{10}$$

$$\left(D = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad \text{Dehnsteifigkeit} \right)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(w'' + \nu\frac{w}{R^2}\right) = -K\left(w'' + \nu\frac{w}{R^2}\right) \approx -Kw''$$

$$M_\varphi = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\varphi z dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{w}{R^2} + \nu w''\right) = -K\left(\frac{w}{R^2} + \nu w''\right) \approx -K\nu w'' \tag{11}$$

$$\left(K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{Biegesteifigkeit} \right).$$

Zur Berechnung der Steifigkeitsverhältnisse des Elementes können die Verformungen u_o und w nicht wie in /4/ voneinander getrennt betrachtet werden; die Längskraft F_{Nx} ist daher als Konstante, aber als von Null verschieden in die weitere Rechnung einzuführen; man erhält somit aus (9)

$$u_0' = \frac{F_{Nx}}{D} - \nu \frac{w}{R}$$

$$F_{N\varphi} = \frac{Eh}{R} w + \nu F_{Nx} . \qquad (12)$$

Setzt man (5), (11) und (12) in (4) ein, so erhält man die Differentialgleichung für die Radialverformung

$$w^{IV} + 4\alpha^4 w = 4\alpha^4 \frac{R^2}{Eh} \left[p(x) - \frac{\nu}{R} F_{Nx} \right] .$$

Mit der Substitution

$$4\alpha^4 = \frac{12(1-\nu^2)}{R^2 h^2}$$

geht die Gleichung über in

$$w^{IV} + \frac{12(1-\nu^2)}{R^2 h^2} w = \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} \left[p(x) - \frac{\nu}{R} F_{Nx} \right] . \qquad (13)$$

Die homogene Lösung dieser Gleichung lautet

$$w_h(x) = C_1 \sin\alpha x \sinh\alpha x + C_2 \sin\alpha x \cosh\alpha x +$$

$$+ C_3 \cos\alpha x \sinh\alpha x + C_4 \cos\alpha x \cosh\alpha x , \qquad (14)$$

die partikuläre Lösung z.B. für p(x)=p=konst.

$$w_p(x) = \frac{R^2}{Eh} \left(p - \frac{\nu}{R} F_{Nx} \right) . \qquad (15)$$

Die gesuchten Steifigkeitsverhältnisse, also der Zusammenhang zwischen der Verschiebung und den Schnittgrößen an den Elementrändern sind nicht von der Belastung der Struktur abhängig, deshalb kann in (15) der Druckterm Null gesetzt werden. Der Einfluß der Druckbelastung wird über die später herzuleitenden äußeren Knotenpunktkräfte bestimmt, die dann die Verschiebungen bzw. die inneren Knotenpunktkräfte zur Folge kaben.

Mit

$$p = 0$$
$$F_{N_x} = -EC_5 = \text{konstant} \tag{16}$$

folgt aus (14) und (15) für die Radialverschiebung

$$w(x) = C_1 \sin\alpha x \sinh\alpha x + C_2 \sin\alpha x \cosh\alpha x +$$
$$+ C_3 \cos\alpha x \sinh\alpha x + C_4 \cos\alpha x \cosh\alpha x + C_5 \nu \frac{R}{h} . \tag{17}$$

Für die Longitudinalverschiebung erhält man aus (12) mit (16) und (17)

$$u_0(x) = \int \left(\frac{F_{Nx}}{D} - \nu \frac{w(x)}{R} \right) dx + C_6 =$$
$$= -\frac{\nu}{2\alpha R} \left\{ C_1 (\sin\alpha x \cosh\alpha x - \cos\alpha x \sinh\alpha x) + C_2 (\sin\alpha x \sinh\alpha x - \cos\alpha x \cosh\alpha x) + \right.$$
$$\left. + C_3 (\sin\alpha x \sinh\alpha x + \cos\alpha x \cosh\alpha x) + C_4 (\sin\alpha x \cosh\alpha x + \cos\alpha x \sinh\alpha x) \right\} -$$
$$- C_5 \frac{x}{h} + C_6 . \tag{18}$$

Den dritten Freiheitsgrad an den beiden Elementrändern, die Neigung bzw. Verdrehung $\frac{dw}{dx}$ erhält man aus (17) zu

$$w'(x) = \alpha \Big\{ C_1 \left(\sin\alpha x \cosh\alpha x + \cos\alpha x \sinh\alpha x \right) +$$

$$+ C_2 \left(\sin\alpha x \sinh\alpha x + \cos\alpha x \cosh\alpha x \right) + C_3 \left(-\sin\alpha x \sinh\alpha x + \cos\alpha x \cosh\alpha x \right) +$$

$$+ C_4 \left(-\sin\alpha x \cosh\alpha x + \cos\alpha x \sinh\alpha x \right) \Big\} . \tag{19}$$

Zur Bestimmung der sechs freien Konstanten stehen die jeweils 3 Randbedingungen an den Enden eines finiten Elementes der Länge L zur Verfügung. Die Elementenden stellen die Knoten in der Terminologie der Finiten-Elemente-Theorie dar, sie entsprechen in dem geschilderten Fall dem mittleren Kreiszylinderumfang. Durch das Aneinanderreihen von jeweils einem Knoten eines Elementes an einen Knoten des angrenzenden Elementes gleicher Natur und durch die statisch exakte Verschiebungsfunktion ist auch die statische und kinematische Verträglichkeit des Elementes in jedem Fall gewährleistet.

Die sechs Randbedingungen nach Abb. 3

$$x = 0 : \quad w_a , \; w_a' , \; u_a$$

$$x = l : \quad w_e , \; w_e' , \; u_e$$

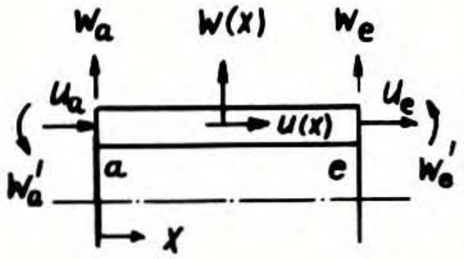


Abb. 3: Randbedingungen

in (17), (18) und (19) eingesetzt und die daraus entstehenden sechs Gleichungen in Matrizenschreibweise angeordnet, führt auf die Matrizengleichung

$$V = AC \tag{20}$$

mit dem Vektor V der Knotenpunktverschiebungen, dem Vektor C der freien Konstanten und der verknüpfenden Matrix A. Eine vollständige Darstellung der Gleichung (20) ist im folgenden gegeben:

c) Vollständige Darstellung der Gleichung (20)

$$V = AC$$

$$V = (w_a, u_a, w_a', w_e, u_e, w_e')^T$$

$$C = (C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)^T$$

$$A = [A_{ij}] \qquad \begin{array}{lll} i & \text{Zeilen-Nr.}, & i = 1 \div 6 \\ j & \text{Spalten-Nr.}, & j = 1 \div 6 \end{array}$$

$$A_{11} = 0 \quad A_{12} = 0 \quad A_{13} = 0 \quad A_{14} = 1 \quad A_{15} = \nu \frac{R}{h} \quad A_{16} = 0$$

$$A_{21} = 0 \quad A_{22} = \frac{\nu}{2\alpha R} \quad A_{23} = -\frac{\nu}{2\alpha R} \quad A_{24} = 0 \quad A_{25} = 0 \quad A_{26} = 1$$

$$A_{31} = 0 \quad A_{32} = \alpha \quad A_{33} = \alpha \quad A_{34} = 0 \quad A_{35} = 0 \quad A_{36} = 0$$

$$A_{41} = \sin\alpha l \sinh\alpha l \quad A_{42} = \sin\alpha l \cosh\alpha l \quad A_{43} = \cos\alpha l \sinh\alpha l$$

$$A_{44} = \cos\alpha l \cosh\alpha l \quad A_{45} = \nu \frac{R}{h} \quad A_{46} = 0$$

$$A_{51} = -\frac{\nu}{2\alpha R}(\sin\alpha l \cosh\alpha l - \cos\alpha l \sinh\alpha l)$$

$$A_{52} = -\frac{\nu}{2\alpha R}(\sin\alpha l \sinh\alpha l - \cos\alpha l \cosh\alpha l)$$

$$A_{53} = -\frac{\nu}{2\alpha R}(\sin\alpha l \sinh\alpha l + \cos\alpha l \cosh\alpha l)$$

$$A_{54} = -\frac{\nu}{2\alpha R}(\sin\alpha l \cosh\alpha l + \cos\alpha l \sinh\alpha l) \quad A_{55} = -\frac{l}{h} \quad A_{56} = 1$$

$$A_{61} = \alpha(\sin\alpha l \cosh\alpha l + \cos\alpha l \sinh\alpha l)$$

$$A_{62} = \alpha(\sin\alpha l \sinh\alpha l + \cos\alpha l \cosh\alpha l)$$

$$A_{63} = \alpha(-\sin\alpha l \sinh\alpha l + \cos\alpha l \cosh\alpha l)$$

$$A_{64} = \alpha(-\sin\alpha l \cosh\alpha l + \cos\alpha l \sinh\alpha l) \quad A_{65} = 0 \quad A_{66} = 0$$

Aus (20) sind die freien Konstanten durch Lösen des linearen Gleichungssystems formal berechenbar. Diese sehr aufwendige analytische Prozedur ist jedoch nur dann notwendig, wenn die im folgenden zu ermittelnde Steifigkeitsmatrix in analytischer Form gewünscht wird.

2.1.2 Berechnung der Schnittgrößen und der Steifigkeitsmatrix

Definitionsgemäß gibt die Steifigkeitsmatrix die Verknüpfung zwischen den Schnittgrößen an den Knoten und den Verschiebungen an den Knoten wieder, und zwar nach der Gleichung

$$S = QU \, . \tag{21}$$

S = Vektor der Schnittgrößen beider Knoten
Q = Steifigkeitsmatrix
U = Vektor der Verschiebungen beider Knoten

Nach (5), (7), (11) und (16) treten folgende auf den Umfang bezogene Schnittgrößen auf:

$$\begin{aligned} F_{Qx} &= -Kw'''(x) = \\ &= -2\alpha^3 K \{ C_1(-\sin\alpha x \cosh\alpha x + \cos\alpha x \sinh\alpha x) + C_2(-\sin\alpha x \sinh\alpha x + \cos\alpha x \cosh\alpha x) - \\ &\quad - C_3(\sin\alpha x \sinh\alpha x + \cos\alpha x \cosh\alpha x) - C_4(\sin\alpha x \cosh\alpha x + \cos\alpha x \sinh\alpha x) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x &= -Kw''(x) = \\ &= -2\alpha^2 K \{ C_1(\cos\alpha x \cosh\alpha x) + C_2(\cos\alpha x \sinh\alpha x) + C_3(-\sin\alpha x \cosh\alpha x) \\ &\quad + C_4(-\sin\alpha x \sinh\alpha x) \} \end{aligned} \tag{22}$$

$$F_{Nx} = -EC_5 = \text{konst.} \qquad (23)$$

Für beide Knoten erhält man die Schnittkräfte nach Abb. 4:

$x = 0:$ $\quad F_{Qa}\,,\ F_{Na}\,,\ M_{xa}$

$x = l:$ $\quad F_{Qe}\,,\ F_{Ne}\,,\ M_{xe}$

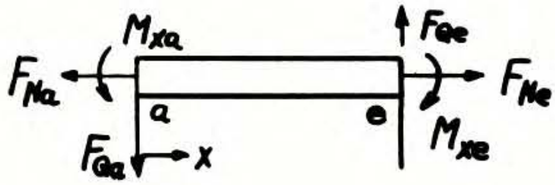


Abb. 4: Elementschnittkräfte

Setzt man die Randwerte für x in (22) ein und ordnet man die entstehenden sechs Gleichungen in Matrizenschreibweise an, erhält man

$$F = B^* \cdot C \qquad (24)$$

mit dem Vektor F der bezogenen Schnittgrößen, dem Vektor C der freien Konstanten und der verknüpfenden Matrix B*.

Die in der bisherigen Betrachtung aus /4/ übernommene Bezeichnungsweise und auch der Bezug der Schnittgrößen auf den Umfang sind in der Finite-Elemente-Methode nicht zweckmäßig, insbesondere muß für die Zusammensetzung mehrerer Elemente ein gleicher Richtungssinn von Kräften und Verschiebungen an den Knoten herrschen. Aus diesem Grund erfolgt eine Umbenennung der folgenden Art (Abb. 5):

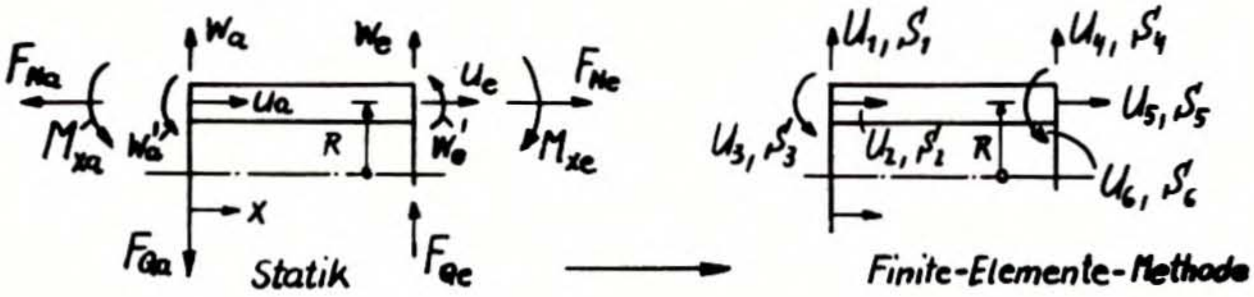


Abb. 5: Umbenennungen

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 2\pi R\,(-F_{Qa}) & U_1 &= w_a \\
S_2 &= 2\pi R\,(-F_{Na}) & U_2 &= u_a \\
S_3 &= 2\pi R\,(\ M_{xa}) & U_3 &= w'_a \\
S_4 &= 2\pi R\,(\ F_{Qe}) & U_4 &= w_e \qquad U \equiv V \\
S_5 &= 2\pi R\,(\ F_{Ne}) & U_5 &= u_e \\
S_6 &= 2\pi R\,(-M_{xe}) & U_6 &= w'_e
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Mit dieser Umbenennung wird aus (24) die Matrizengleichung

$$S = B \cdot C \tag{26}$$

mit dem Vektor S der Schnittgrößen, dem Vektor C der freien Konstanten C und der verknüpfenden Matrix B. Eine vollständig Darstellung der Gleichung (26) ist im folgenden gegeben:

V o l l s t ä n d i g e   D a r s t e l l u n g   d e r G l e i c h u n g (26)

$$S = BC = \pi \alpha^2 R \frac{Eh^3}{3(1-\nu^2)} \bar{B}\, C$$

$S = (S_i)$

$C = (C_i)$ $\quad i$ Zeilen-Nr. $\quad i = 1 \div 6$

$\bar{B} = [\bar{B}_{ij}]$ $\quad j$ Spalten-Nr. $\quad j = 1 \div 6$

$\bar{B}_{11} = 0 \qquad \bar{B}_{12} = \alpha \qquad \bar{B}_{13} = -\alpha \qquad \bar{B}_{14} = 0 \qquad \bar{B}_{15} = 0 \qquad \bar{B}_{16} = 0$

$\bar{B}_{21} = 0 \qquad \bar{B}_{22} = 0 \qquad \bar{B}_{23} = 0 \qquad \bar{B}_{24} = 0 \qquad \bar{B}_{25} = \frac{E}{2\alpha^2 K} \qquad \bar{B}_{26} = 0$

$\bar{B}_{31} = -1 \qquad \bar{B}_{32} = 0 \qquad \bar{B}_{33} = 0 \qquad \bar{B}_{34} = 0 \qquad \bar{B}_{35} = 0 \qquad \bar{B}_{36} = 0$

$\bar{B}_{41} = -\alpha\,(-\sin\alpha l \cosh\alpha l + \cos\alpha l \sinh\alpha l)$

$\bar{B}_{42} = -\alpha\,(-\sin\alpha l \sinh\alpha l + \cos\alpha l \cosh\alpha l)$

$\bar{B}_{43} = \alpha\,(\sin\alpha l \sinh\alpha l + \cos\alpha l \cosh\alpha l)$

$\bar{B}_{44} = \alpha\,(\sin\alpha l \cosh\alpha l + \cos\alpha l \sinh\alpha l)$

$\bar{B}_{45} = 0$

$\bar{B}_{46} = 0$

$\bar{B}_{51} = 0 \qquad \bar{B}_{52} = 0 \qquad \bar{B}_{53} = 0 \qquad \bar{B}_{54} = 0 \qquad \bar{B}_{55} = -\frac{E}{2\alpha^2 K} \qquad \bar{B}_{56} = 0$

$\bar{B}_{61} = \cos\alpha l \cosh\alpha l \qquad \bar{B}_{62} = \cos\alpha l \sinh\alpha l \qquad \bar{B}_{63} = -\sin\alpha l \cosh\alpha l$

$\bar{B}_{64} = -\sin\alpha l \sinh\alpha l \qquad \bar{B}_{65} = 0 \qquad \bar{B}_{66} = 0$

Setzt man (20) unter Berücksichtigung von (25) in (26) ein, erhält man den gesuchten Zusammenhang (21)

$$S = B \,.\, C = B \,.\, A^{-1} \,.\, V = B \,.\, A^{-1} \,.\, U = Q \,.\, U$$

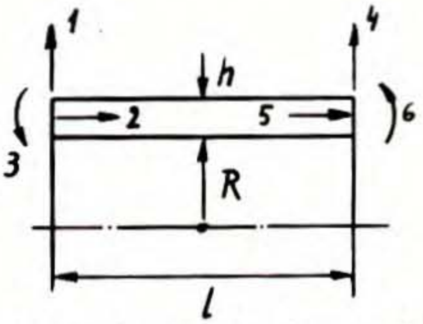
mit der Steifigkeitsmatrix

$$Q = B \,.\, A^{-1}. \tag{27}$$

Aus (21) sind bei Kenntnis von Q und der statischen oder dynamischen Verschiebung U (als Ergebnis eines Rechenlaufes) die Schnittgrößen bzw. daraus die für die Festigkeitsberechnung notwendigen Spannungen bestimmbar.

Zur Illustration des Aufbaues der Steifigkeitsmatrix ist im folgenden die Matrix Q angegeben, die bei Vernachlässigung des zweidimensionalen Spannungszustandes auftreten würde; dies entspräche zwei voneinander entkoppelten Systemen, einmal Schalenbiegung und einmal Stabzug. Diese Matrix ist mit erträglichem Aufwand analytisch berechenbar, in der tatsächlich durchgeführten Rechnung wird natürlich der zweidimensionale Spannungszustand berücksichtigt und die Berechnung der Steifigkeitsmatrix erfolgt numerisch nach (27).

S t e i f i g k e i t s m a t r i x   b e i   V e r n a c h - l ä s s i g u n g   d e s   2 - d i m e n s i o n a l e n   S p a n n u n g s z u s t a n d e s (vgl. Abb. 6)



$$Q = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \times & & \times & \times & \times & \\ & \otimes & & & & \otimes \\ \times & & \times & \times & \times & \\ \times & & \times & \times & \times & \\ \times & & \times & \times & \times & \\ & \otimes & & & & \otimes \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array} = [Q_{ij}] = [Q_{ji}]$$

Abb. 6: Freiheitsgrade und Matrizenbesetzung

X Matrixelemente der Schalenbiegung }
⊗ Matrixelemente des Rohrzuges } voneinander unabhängig

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2h^2}} \qquad k_B = \frac{\pi R \alpha E h^3}{3(1-\nu^2)(\sinh^2\alpha l - \sin^2\alpha l)}$$

$$Q_{11} = k_B \, 2\alpha^2 (\sin\alpha l \cos\alpha l + \sinh\alpha l \cosh\alpha l)$$

$$Q_{13} = k_B \, \alpha \, (\sin^2\alpha l + \sinh^2\alpha l)$$

$$Q_{14} = -k_B \, 2\alpha^2 (\sin\alpha l \cosh\alpha l + \cos\alpha l \sinh\alpha l)$$

$$Q_{15} = k_B \, 2\alpha \, (\sin\alpha l \sinh\alpha l)$$

$$Q_{33} = k_B \quad (-\sin\alpha l \cos\alpha l + \sinh\alpha l \cosh\alpha l)$$
$$Q_{34} = -k_B \; 2\alpha \; (\sin\alpha l \sinh\alpha l)$$
$$Q_{35} = k_B \quad (\sin\alpha l \cosh\alpha l - \cos\alpha l \sinh\alpha l)$$

$$Q_{44} = k_B \; 2\alpha^2 (\sin\alpha l \cos\alpha l + \sinh\alpha l \cosh\alpha l)$$
$$Q_{45} = -k_B \; \alpha \; (\sinh^2\alpha l + \sin^2\alpha l)$$

$$Q_{55} = k_B \quad (-\sin\alpha l \cos\alpha l + \sinh\alpha l \cosh\alpha l)$$

$$Q_{22} = k_z = 2\pi E \frac{Rh}{l}$$
$$Q_{26} = -k_z$$

$$Q_{66} = k_z$$

Alle anderen Matrixelemente sind mit Null besetzt.

Die Bedeutung des zweidimensionalen Spannungszustandes gibt folgendes Beispiel eines geschlossenen, einseitig eingespannten Rohres unter Innendruck wieder (Abb. 7):

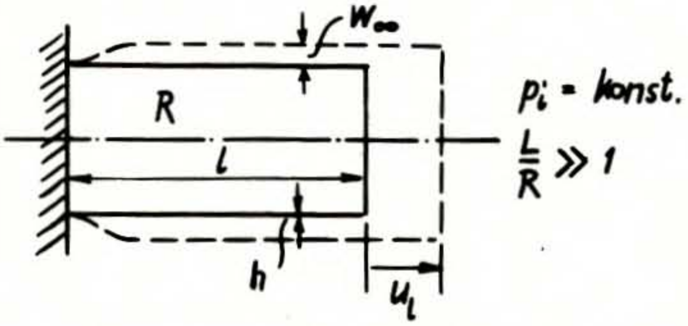


Abb. 7: Beispiel des Rohres unter Innendruck

2-dimensionaler Spannungszustand: $\nu > 0$

$$u_l = \frac{Rl}{Eh}\left(\frac{1}{2}-\nu\right)p_i \qquad w_\infty = \frac{R^2}{Eh}\left(1-\frac{\nu}{2}\right)p_i$$

2 getrennte einachsige Spannungszustände: $\nu = 0$

$$u_l^* = \frac{Rl}{Eh}\,\frac{1}{2}\,p_i \qquad w_\infty^* = \frac{R^2}{Eh}\,p_i$$

Für Stahl mit $\nu = 0{,}3$ ergeben sich folgende Verhältnisse:

$$\frac{u_l}{u_l^*} = 1-2\nu = 0{,}4 \qquad \frac{w_\infty}{w_\infty^*} = 1-\frac{\nu}{2} = 0{,}85$$

Durch diese Verhältnisse wird klar, daß der Berücksichtigung der Kopplung von Quer- und Längsverschiebung über die Querkontraktionszahl ν große Bedeutung zukommt.

2.2 Herleitung der Massenmatrix

Zur Bestimmung der Trägheitseigenschaften des Zylinderelementes wird die Methode der "consistent mass" bzw. "equivalent mass" /1, 2/ angewendet. Diese Methode liefert im allgemeinen wesentlich bessere Ergebnisse als die der "lumped mass", da nicht nur die Hauptdiagonale der Massenmatrix besetzt ist (Trägheitswirkung aller sechs Freiheitsgrade voneinander unabhängig), sondern analog zur Steifigkeitsmatrix eine vollständige Matrizenbesetzung erfolgt.
Die Massenmatrix berechnet sich, z.B. nach Lagrange aus den Beziehungen für die potentielle und kinetische Energie hergeleitet, zu /1/

$$M = \rho \int_V a^T a \, dV \tag{28}$$

mit der konstanten Dichte ρ, dem Volumenelement dV und der Verknüpfungsmatrix a(x), welche den Zusammenhang zwischen den Verschiebungen im Innern eines finiten Elementes u(x) und den Knotenpunktverschiebungen wiedergibt:

$$\begin{aligned}
u\,(x) &= a\,(x) \cdot U \\
u\,(x) &= \left(w\,(x)\,,\ u_o\,(x)\right)^T \\
U &= \left(U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6\right)^T \\
a\,(x) &= \begin{vmatrix} a_w\,(x) \\ a_u\,(x) \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{29}$$

Die Werte für a erhält man aus (17) und (18) unter Berücksichtigung von (20) und (23)

$$\begin{aligned}
a_w(x) &= \left(\sin\alpha x \sinh\alpha x,\ \sin\alpha x \cosh\alpha x,\ \cos\alpha x \sinh x,\ \cos\alpha x \cosh\alpha x,\ \nu\frac{R}{h},\ 0 \right) A^{-1} \\
&= \left(W_1(x),\ W_2(x),\ W_3(x),\ W_4(x),\ W_5(x),\ W_6(x) \right) A^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_u(x) = \Big[&-\frac{\nu}{2\alpha R}\left(\sin\alpha x \cosh\alpha x - \cos\alpha x \sinh\alpha x \right),\ -\frac{\nu}{2\alpha R}\left(\sin\alpha x \sinh\alpha x - \cos\alpha x \cosh\alpha x \right) \\
&-\frac{\nu}{2\alpha R}\left(\cos\alpha x \cosh\alpha x + \sin\alpha x \sinh\alpha x \right),\ -\frac{\nu}{2\alpha R}\left(\sin\alpha x \cosh\alpha x + \cos\alpha x \sinh\alpha x \right) \\
&-\frac{x}{h},\ 1 \Big] A^{-1} = \\
= &\left(u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x),\ u_4(x),\ u_5(x),\ u_6(x) \right) A^{-1}
\end{aligned} \tag{30}$$

$$a(x) = \begin{vmatrix} a_w(x) \\ a_u(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_1(x) & w_2(x) & w_3(x) & w_4(x) & w_5(x) & w_6(x) \\ u_1(x) & u_2(x) & u_3(x) & u_4(x) & u_5(x) & u_6(x) \end{vmatrix} A^{-1}. \tag{30}$$

Aus Abb. 8

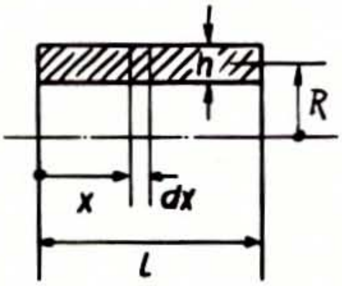


Abb. 8: Volumenelement

folgt

$$dV = 2\pi R h dx$$

und für (28) folgt die 6 x 6-Matrix

$$M = 2\pi R h \rho \int_{x=0}^{l} (A^{-1})^T \begin{vmatrix} w_1(x) & u_1(x) \\ w_2(x) & u_2(x) \\ \vdots & \vdots \\ w_6(x) & u_6(x) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1(x) & w_2(x) & \dots & w_6(x) \\ u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_6(x) \end{vmatrix} A^{-1} dx,$$

bzw.

$$M = 2\pi R h \varrho (A^{-1})^T \left[\int_0^l \begin{vmatrix} w_1^2+u_1^2 & w_1w_2+u_1u_2 & w_1w_3+u_1u_3 & \cdots & w_1w_6+u_1u_6 \\ & w_2^2+u_2^2 & w_2w_3+u_2u_3 & \cdots & w_2w_6+u_2u_6 \\ & & w_3^2+u_3^2 & \cdots & w_3w_6+u_3u_6 \\ & \text{symmetrisch} & & & \vdots \\ & & & & w_6^2+u_6^2 \end{vmatrix} dx \right] A$$

$$M = 2\pi R h \varrho (A^{-1})^T I_M A^{-1}. \qquad (31)$$

Die Auswertung der transzendenten Integrale erfolgte von Hand, die sich damit ergebende Besetzung der Matrix I_M ist im folgenden gegeben:

Besetzung der Massenmatrix
(obere Dreiecksmatrix)

$$M = 2\pi R h \varrho (A^{-1})^T I_M A^{-1} \qquad I_M = [I_{Mij}] = \text{symmetrisch} \qquad \begin{matrix} i = 1 \div 6 \\ j = 1 \div 6 \end{matrix}$$

$$k_w = \frac{1}{16\alpha} \qquad k_u = 2k_w \left(\frac{\nu}{2\alpha R}\right)^2 \qquad k_1 = \frac{\nu}{2\alpha}\frac{R}{h} \qquad k_2 = \frac{\nu}{2\alpha}\frac{L}{2\alpha R h}$$

$$k_3 = \frac{\nu}{2\alpha}\frac{1}{\alpha R}$$

$$I_{M11} = k_w\left[-\sin 2\alpha l(\cosh 2\alpha l - 2) + \sinh 2\alpha l\,(2 - \cos 2\alpha l) - 4\alpha l\right] + $$
$$+ k_u\left[-\sin 2\alpha l(\cosh 2\alpha l + 2) + \sinh 2\alpha l\,(2 + \cos 2\alpha l)\right]$$

$$I_{M12} = k_w\left[-\sin 2\alpha l \sinh 2\alpha l + \cosh 2\alpha l\,(2 - \cos 2\alpha l) - 1\right] + $$
$$+ k_u\left[-\sin 2\alpha l \sinh 2\alpha l + \cosh 2\alpha l\,(2 + \cos 2\alpha l) - 3\right]$$

$$I_{M13} = k_w\left[\sin 2\alpha l \sinh 2\alpha l - \cos 2\alpha l\,(\cosh 2\alpha l - 2) - 1\right] + $$
$$+ k_u\left[-\sin 2\alpha l \sinh 2\alpha l - \cos 2\alpha l\,(\cosh 2\alpha l + 2) + 3\right]$$

$$I_{M14} = k_w\left[\sin 2\alpha l \cosh 2\alpha l - \cos 2\alpha l \sinh 2\alpha l\right] + $$
$$+ k_u\left[-\sin 2\alpha l \cosh 2\alpha l - \cos 2\alpha l \sinh 2\alpha l + 4\alpha l\right]$$

$$I_{M15} = -k_1\left[\sin\alpha l \cosh\alpha l - \cos\alpha l \sinh\alpha l\right] + $$
$$+ k_2\left[\frac{1}{\alpha l}(\sin\alpha l \cosh\alpha l + \cos\alpha l \sinh\alpha l) - 2\cos\alpha l \cosh\alpha l\right]$$

$$I_{M16} = k_3\left[\cos\alpha l \cosh\alpha l - 1\right]$$

$$I_{M22} = k_w\left[-\sin 2\alpha l(\cosh 2\alpha l + 2) + \sinh 2\alpha l\,(2 - \cos 2\alpha l) + 4\alpha l\right] + $$
$$+ k_u\left[-\sin 2\alpha l(\cosh 2\alpha l - 2) + \sinh 2\alpha l(2 + \cos 2\alpha l)\right]$$

$$I_{M23} = k_w\left[\sin 2\alpha l \cosh 2\alpha l - \cos 2\alpha l \sinh 2\alpha l\right] + $$
$$+ k_u\left[-\sin 2\alpha l \cosh 2\alpha l - \cos 2\alpha l \sinh 2\alpha l - 4\alpha l\right]$$

$$I_{M24} = k_w \left[\sin 2\alpha l \sinh 2\alpha l - \cos 2\alpha l \left(\cosh 2\alpha l + 2 \right) + 3 \right] + $$
$$+ k_u \left[-\sin 2\alpha l \sinh 2\alpha l - \cos 2\alpha l \left(\cosh 2\alpha l - 2 \right) - 1 \right]$$

$$I_{M25} = -k_1 \left[\sin \alpha l \sinh \alpha l - \cos \alpha l \cosh \alpha l + 1 \right] +$$
$$+ k_2 \left[\frac{1}{\alpha l} \left(\sin \alpha l \sinh \alpha l + \cos \alpha l \cosh \alpha l - 1 \right) - 2 \cos \alpha l \sinh \alpha l \right]$$

$$I_{M26} = k_3 \left[\cos \alpha l \sinh \alpha l \right]$$

$$I_{M33} = k_w \left[\sin 2\alpha l \left(\cosh 2\alpha l - 2 \right) + \sinh 2\alpha l \left(2 + \cos 2\alpha l \right) - 4\alpha l \right] +$$
$$+ k_u \left[\sin 2\alpha l \left(\cosh 2\alpha l + 2 \right) + \sinh 2\alpha l \left(2 - \cos 2\alpha l \right) \right]$$

$$I_{M34} = k_w \left[\sin 2\alpha l \sinh 2\alpha l + \cosh 2\alpha l \left(2 + \cos 2\alpha l \right) - 3 \right] +$$
$$+ k_u \left[\sin 2\alpha l \sinh 2\alpha l + \cosh 2\alpha l \left(2 - \cos 2\alpha l \right) - 1 \right]$$

$$I_{M35} = -k_1 \left[\sin \alpha l \sinh \alpha l + \cos \alpha l \cosh \alpha l \right] +$$
$$+ k_2 \left[\frac{1}{\alpha l} \left(-\sin \alpha l \sinh \alpha l + \cos \alpha l \cosh \alpha l - 1 \right) + 2 \sin \alpha l \cosh \alpha l \right]$$

$$I_{M36} = -k_3 \left[\sin \alpha l \cosh \alpha l \right]$$

$$I_{M44} = k_w \left[\sin 2\alpha l \left(\cosh \alpha l + 2 \right) + \sinh 2\alpha l \left(2 + \cos 2\alpha l \right) + 4\alpha l \right] +$$
$$+ k_u \left[\sin 2\alpha l \left(\cosh \alpha l - 2 \right) + \sinh 2\alpha l \left(2 - \cos 2\alpha l \right) \right]$$

$$I_{M45} = -k_1 \left[\sin \alpha l \cosh \alpha l + \cos \alpha l \sinh \alpha l \right] +$$
$$+ k_2 \left[\frac{1}{\alpha l} \left(-\sin \alpha l \cosh \alpha l + \cos \alpha l \sinh \alpha l \right) + 2 \sin \alpha l \sinh \alpha l \right]$$

$$I_{M46} = -k_3 \left[\sin \alpha l \sinh \alpha l \right]$$

$$I_{M55} = \left(\nu \frac{R}{h} \right)^2 l + \frac{l^3}{3h^2}$$

$$I_{M56} = \frac{l^2}{2h}$$

$$I_{M66} = l$$

2.3 Herleitung der Störmatrix

Für die Berechnung der Störmatrix stehen die Differenzdrücke p_a und p_e am Anfang bzw. Ende eines Elements zur Verfügung, zwischen beiden Knoten wird ein linearer Verlauf angenommen. Diese Annahme ist sinnvoll, da bei der Verwendung von gerechneten oder gemessenen Druchverläufen meist auch nur Werte an diskreten Punkten bekannt sind und der Verlauf zwischen diesen Punkten angenommen werden muß. Prinzipiell sind auch andere Verläufe, z.B. ein parabolischer zwischen den 3 Knoten zweier Elemente möglich, aber nicht notwendig. Unter der Bedingung, daß die zu ermittelnde diskrete äquivalente Knotenpunktlast im Element dieselbe potentielle Energie hervorruft, wie die tatsächliche, verteilte Drucklast, folgt für die Knotenpunktlast /1/

$$F = \int_S a^T(x)\,\Phi\,dS \qquad (32)$$

mit der Oberflächenkraft ΦdS und der verknüpfenden Matrix $a^T(x)$ nach (29).

Man muß unterscheiden zwischen am Ende offenen oder geschlossenen Rohren, was sich in der Berechnung von (32) in der Definition der Oberflächenkraft und auch der Verknüpfungsmatrix niederschlägt. Ein geschlossenes Rohrende kann auch durch eine Reihe geschlossener Elemente dargestellt werden, da sich bei der Aneinanderreihung mehrerer Elemente die zufolge der Geschlossenheit auftretenden zusätzlichen Längskräfte aufheben, nur die Längskraft am Rohrende bleibt erhalten.

O f f e n e   R o h r e n d e n

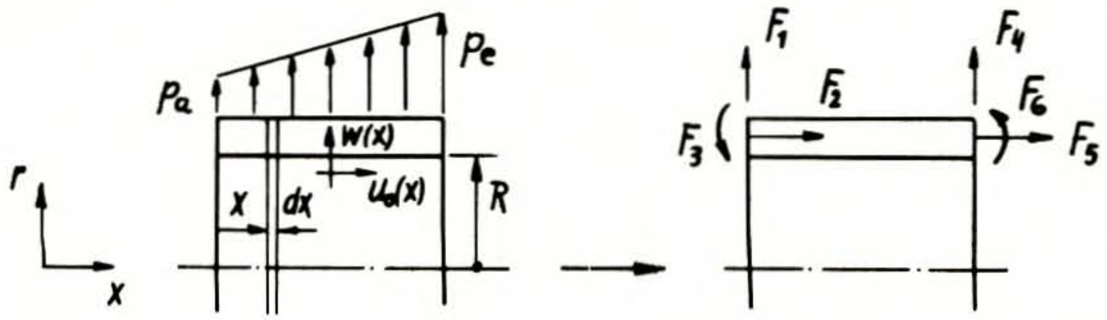


Abb. 9: Rohrelement mit offenen Enden

Die Oberflächenkraft ist nach Abb. 9 gegeben durch

$$\oint_I d_I S' = 2\pi R\, p(x)\, dx . \tag{33}$$

Da verteilte Oberflächenbelastungen nur in Richtung r auftreten, reduziert sich (29) auf den radialen Anteil

$$a^T(x) = a_w^T(x) . \tag{34}$$

Die lineare Druckverteilung genügt der Gleichung

$$p(x) = p_a + \frac{p_e - p_a}{l}\, x , \tag{35}$$

die in (32) eingesetzt ergibt

$$F = 2\pi R \int_{x=0}^{l} a_w^T(x)\left(p_a + \frac{p_e - p_a}{l}\, x\right) dx = 2\pi R \int_0^l a_w^T(x)\left(1-\frac{x}{l} , \frac{x}{l}\right) dx \begin{vmatrix} p_a \\ p_e \end{vmatrix}$$

$$= 2\pi R \left(A^{-1}\right)^T \left[\int \begin{vmatrix} w_1(x) \\ w_2(x) \\ \vdots \\ w_6(x) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1-\frac{x}{l} , & \frac{x}{l} \end{vmatrix} dx \right] \begin{vmatrix} p_a \\ p_e \end{vmatrix}$$

$$= 2\pi R (A^{-1})^T \left[\int \begin{vmatrix} w_1(x)(1-\frac{x}{l}) & w_1(x)\frac{x}{l} \\ w_2(x)(1-\frac{x}{l}) & w_2(x)\frac{x}{l} \\ \vdots & \vdots \\ w_6(x)(1-\frac{x}{l}) & w_6(x)\frac{x}{l} \end{vmatrix} dx \right] \begin{vmatrix} p_a \\ p_e \end{vmatrix} \tag{36}$$

$$F = 2\pi R (A^{-1})^T I_F p = Bp$$

mit der Störmatrix

$$B = 2\pi R (A^{-1})^T I_F \ ,$$

dem Vektor F der sechs äquivalenten Knotenpunktlasten und dem Vektor p der zwei Knotenpunktdrücke.

Bemerkung: Infolge des zweidimensionalen Spannungszustandes sind die äußeren Knotenpunktkräfte F_2 und F_5 nicht Null.

Die Auswertung der Integrale $w_i(x)(1-\frac{x}{l})$ und $w_i(x)\frac{x}{l}$ erfolgte mittels (30) von Hand, die vollständige Darstellung von (36) ist im Anschluß an die Herleitung für die geschlossenen Rohrenden gegeben.

G e s c h l o s s e n e   R o h r e n d e n

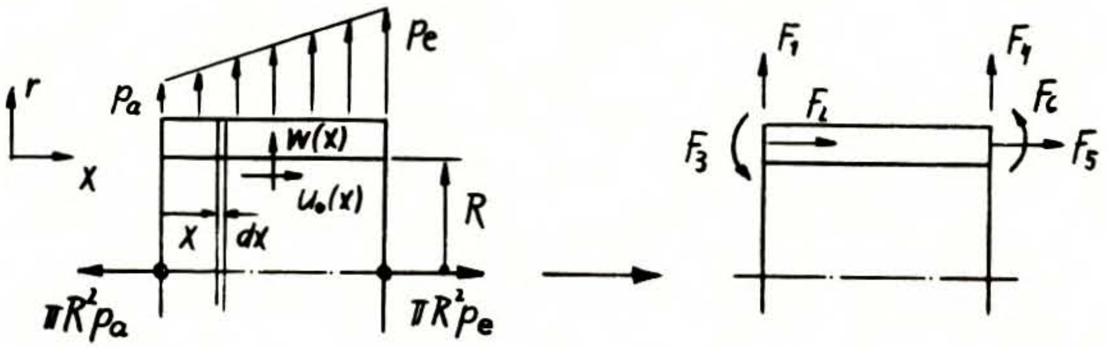


Abb. 10: Rohrelement mit geschlossenen Enden

Zu den zuvor geschilderten verteilten Druckbelastungen in r-Richtung treten zwei diskrete Kräfte in x-Richtung hinzu. Will man die Gesamtbelastung mit (32) erfassen, muß bei diskreten Kräften beachtet werden, daß dann das Integral entartet zu

$$\int a^T(x)\,\underline{\Phi}\,d\rho' \;\rightarrow\; a^T(x=x_d)\,F_d \tag{37}$$

mit x_d als dem Ort des Angriffes der diskreten Kraft und F_d als der diskreten Kraft selbst.

Im geschilderten Fall folgt für die zusätzlich zu berücksichtigende Knotenpunktkraft in x-Richtung

$$F_z = F_z[a_u^T(x)] = d_u^T(0)(-\pi R^2 p_a) + d_u^T(l)(\pi R^2 p_e)$$

$$= \pi R^2 (A^{-1})^T \begin{vmatrix} -u_1(0) & u_1(l) \\ -u_2(0) & u_2(l) \\ \vdots & \vdots \\ -u_6(0) & u_6(l) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_a \\ p_e \end{vmatrix} \tag{38}$$

$$F_z = 2\pi R (A^{-1})^T I_{Fz} p = Bp$$

analog (36).

Eine etwas einfache Art der Berücksichtigung des geschlossenen Rohres ergibt sich, wenn man den Kräften F_2 und F_5 des Vektors F aus (36) die Längskräfte aus Abb. 10 überlagert, also

$$\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{vmatrix} = \left[2\pi R (A^{-1})^T I_F + \pi R^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right] p = Bp. \tag{39}$$

Die Ergebnisse sind identisch.

Die vollständige Darstellung von (36) und (38) ist im folgenden gegeben:

B e s e t z u n g d e s E r r e g e r v e k t o r s

offenes Rohr $F = 2\pi R\,(A^{-1})^T I_F\, p$

geschlossenes Rohr $F = 2\pi R\,(A^{-1})^T (I_F + I_{FZ})\, p$

$\bar{I}_F = [I_{Fij}]$ $\quad i$ Zeilenzahl, $i = 1 \div 6$

$\quad j$ Spaltenzahl, $j = 1 \div 2$

$\bar{I}_{FZ}$ wie I_F

$p = (p_a, p_e)^T$

$I_F = k_F \bar{I}_F$

$I_{FZ} = k_{FZ} \bar{I}_{FZ}$ $\quad k_F = k_{FZ} = \frac{1}{2\alpha}$

$$\bar{I}_{F11} = -\frac{1}{\alpha l}(\cos\alpha l \cosh\alpha l - 1)$$
$$\bar{I}_{F12} = \sin\alpha l \cosh\alpha l - \cos\alpha l \sinh\alpha l + \frac{1}{\alpha l}(\cos\alpha l \cosh\alpha l - 1)$$
$$\bar{I}_{F21} = 1 - \frac{1}{\alpha l}\cos\alpha l \sinh\alpha l$$
$$\bar{I}_{F22} = \sin\alpha l \sinh\alpha l - \cos\alpha l \cosh\alpha l + \frac{1}{\alpha l}\cos\alpha l \sinh\alpha l$$
$$\bar{I}_{F31} = -1 + \frac{1}{\alpha l}\sin\alpha l \cosh\alpha l$$
$$\bar{I}_{F32} = \sin\alpha l \sinh\alpha l + \cos\alpha l \cosh\alpha l - \frac{1}{\alpha l}\sin\alpha l \cosh\alpha l$$
$$\bar{I}_{F41} = \frac{1}{\alpha l}\sin\alpha l \sinh\alpha l$$
$$\bar{I}_{F42} = \sin\alpha l \cosh\alpha l + \cos\alpha l \sinh\alpha l - \frac{1}{\alpha l}\sin\alpha l \sinh\alpha l$$
$$\bar{I}_{F51} = -\gamma\alpha l \frac{R}{h}$$
$$\bar{I}_{F52} = -\gamma\alpha l \frac{R}{h}$$
$$\bar{I}_{F61} = 0$$
$$\bar{I}_{F62} = 0$$

$$
\begin{aligned}
\bar{I}_{FZ11} &= 0 & \bar{I}_{FZ12} &= -\frac{\nu}{2}\left(\sin\alpha l \cosh\alpha l - \cos\alpha l \sinh\alpha l \right) \\
\bar{I}_{FZ21} &= -\frac{\nu}{2} & \bar{I}_{FZ22} &= -\frac{\nu}{2}\left(\sin\alpha l \sinh\alpha l - \cos\alpha l \cosh\alpha l \right) \\
\bar{I}_{FZ31} &= -\frac{\nu}{2} & \bar{I}_{FZ32} &= -\frac{\nu}{2}\left(\sin\alpha l \sinh\alpha l + \cos\alpha l \cosh\alpha l \right) \\
\bar{I}_{FZ41} &= 0 & \bar{I}_{FZ42} &= -\frac{\nu}{2}\left(\sin\alpha l \cosh\alpha l + \cos\alpha l \sinh\alpha l \right) \\
\bar{I}_{FZ51} &= 0 & \bar{I}_{FZ52} &= -\alpha \frac{Rl}{h} \\
\bar{I}_{FZ61} &= -\alpha R & \bar{I}_{FZ62} &= \alpha R
\end{aligned}
$$

3. ANALYTISCHE ERGEBNISSE FÜR DIE STATISCHE VERFORMUNG UND DAS DYNAMISCHE EIGENVERHALTEN

Zum Nachweis der Leistungsfähigkeit des hergeleiteten Schalenelements ROTSYM sollen analytische Untersuchungen über die statische Verformung infolge eines vorgegebenen Innendrucks und über das Eigenverhalten angestellt werden. In Kap. 4 werden dann die aus numerischen Rechnungen erhaltenen Ergebnisse mit denen der analytischen Untersuchungen verglichen.

3.1 Statische Verformung unter Innendruck

Die statischen Verformungen $w(x)$ und $u_o(x)$ sind unter Verwendung der Lösung der Gleichungen (12) und (13) für analytisch darstellbare Druckverläufe und konstante Abmessungen über x lösbar. Zum Vergleich mit den numerischen Rechnungen soll ein möglichst einfacher und somit leicht überprüfbarer Verformungszustand analytisch bestimmt werden, nämlich der nach Abb. 11:

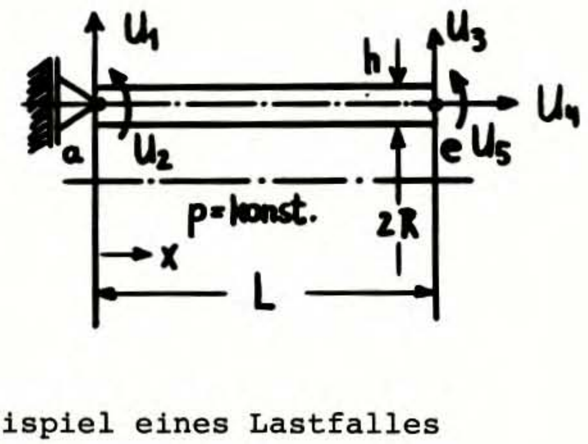


Abb. 11: Beispiel eines Lastfalles

Das Rohr- (Zylinder-) Element sei an einer Seite in axialer Richtung gehalten und stehe unter konstantem Innendruck, ferner seien beide Enden offen. Mit den Gleichungen (14) und (15) für konstanten Innendruck, weiters mit Gleichung (18) und unter Berücksichtigung der für diesen Fall zutreffenden Randbedingungen folgt der sehr einfache Zusammenhang

$$
\begin{aligned}
w(x) &= R^2 p/Eh = w = \text{konstant} \\
w'(x) &\equiv 0 \\
u_o(x) &= -\nu R p x/Eh
\end{aligned}
\tag{40}
$$

bzw. die Knotenpunktverschiebungen

$$
\begin{aligned}
U_1 = U_3 &= w_a = w_e = R^2 p/Eh \\
U_2 = U_5 &= w_a' = w_e' = 0 \\
U_4 &= u_e = -\nu R p L/Eh
\end{aligned}
\tag{41}
$$

mit

R	Innenradius
h	Wandstärke
x	Längenkoordinate
ν	Querkontraktionszahl
p	Differenzdruck = konstant über x
u_o	Längsverschiebung
w	Querverschiebung
w'	Neigungswinkel

3.2 Dynamisches Eigenverhalten des Schalenelements

Ausgangspunkt für die analytische Berechnung des Eigenverhaltens des Schalenelements ist das dynamische Gleichgewicht des Elementausschnittes Abb. 12:

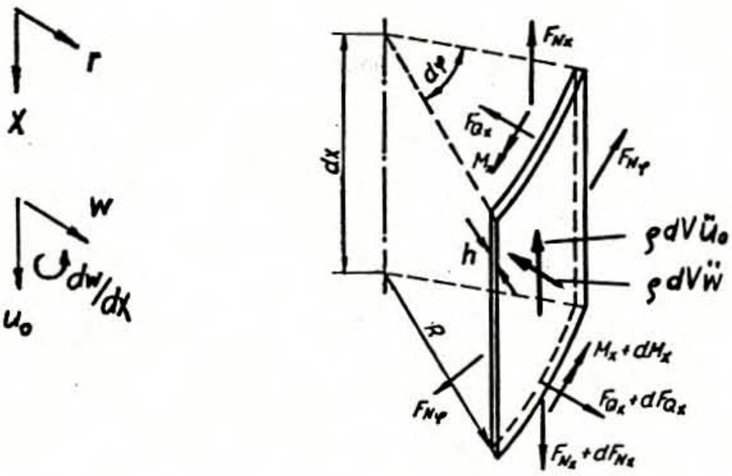


Abb. 12: Dynamisches Gleichgewicht des Volumenelementes

x-Richtung: $dF_{Nx} R d\varphi - \varrho R h dx d\varphi \ddot{u}_0 = 0$

r-Richtung: $dF_{Qx} R d\varphi - 2 F_{N\varphi} dx \frac{1}{2} d\varphi - \varrho R h dx d\varphi \ddot{w} = 0$ (42)

Drehung um Elementmitte $-dM_x R d\varphi + (F_{Qx} + dF_{Qx} + F_{Qx}) \frac{1}{2} dx R d\varphi = 0$

Das Trägheitsverhalten des Elementes wird nur durch die radiale und longitudinale Verschiebung beeinflußt, der Einfluß der Rotation ist vernachlässigt.

Damit wird aus (42)

$$F_{Nx}' = \varrho h \ddot{u}_0 \tag{43}$$

$$M_x'' - \frac{1}{R} F_{N\varphi} = \varrho h \ddot{w}. \tag{44}$$

Mit den Formenänderungsbeziehungen wie in Kap. 2.1.1 wird daraus folgendes System von 2 partiellen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} w^{IV} + \frac{12}{R^2h^2} w + \frac{12\nu}{Rh^2} u_o' &= -\frac{12\rho}{Eh^2}(1-\nu^2)\,\ddot{w} \\ \frac{\nu}{R} w' + u_o'' &= \frac{\rho}{E}(1-\nu^2)\,\ddot{u}_o \end{aligned} \qquad (45)$$

Eine analytische Lösung dieser simultanen Differentialgleichungen konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht gefunden werden und ist auch offensichtlich problematisch.

Daher soll die analytische Berechnung des Eigenverhaltens für den entkoppelten Fall bestimmt werden, d.h. das Schalenverhalten $w(x,t)$ und das Stabverhalten $u_o(x,t)$ sollen getrennt betrachtet werden; dies entspricht der Querkontraktionszahl $\nu = 0$.

a) S t a b s c h w i n g u n g

Für den in Abb. 11 dargestellten Fall des einseitig festgehaltenen Elementes (hier nun Stabes) erhält man über die Differentialgleichung /6/

$$\ddot{u}_o - \frac{E}{\rho} u_o'' = 0 \qquad (46)$$

den Lösungssatz

$$u_o(x,t) = F(x)G(t) \qquad (47)$$

und unter Betrachtung der Randbedingungen die Eigenfrequenzen /6/

$$\omega_{n\,Stab} = \frac{(2n-1)\pi}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad n = 1,2,\ldots \qquad (48)$$

Zum Vergleich der numerisch zu berechnenden Eigenformen des finiten Schalenelements mit der Analytik dient die Ortsfunktion F(x) in (47). Sie wird zu

$$F_n(x) = \sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{2L} \cdot \frac{x}{L}\right] \qquad (49)$$

und wird für die n Eigenfrequenzen an diskreten Stellen x/L, die mit den Knoten der numerischen Rechnung übereinstimmen, berechnet und mit den Eigenformen von ROTSYM verglichen.

b) S c h a l e n s c h w i n g u n g

Die Berechnung der reinen rotationssymmetrischen Schalenschwingungen läßt sich am einfachsten aus der Herleitung der statischen Verschiebungen in Kap. 2.1.1 durchführen, wenn statt der Druckbelastung die d'Alembert'sche Massenkraft angreift:

$$p = -\varrho h \ddot{w} \qquad (50)$$

Damit wird aus der Differentialgleichung für die statische Verschiebung in Kap. 2.1.1 die partielle Differentialgleichung

$$w^{IV} + 4\alpha^4 w = -4\alpha^4 R^2 \frac{\varrho}{E} \ddot{w} = -\beta \ddot{w}. \qquad (51)$$

Mit dem Lösungsansatz der Trennung der Variablen

$$w(x,t) = F(x)\, G(t)$$

folgt

$$\frac{F^{IV}}{F} = -4\alpha^4 - \beta \frac{\ddot{G}}{G} = k^4 = \text{konstant}.$$

Die Ortsfunktion F(x) erhält man aus

$$F^{IV}(x) - k^4 F(x) = 0$$

zu

$$F(x) = C \sin kx + D \cos kx + E \sinh kx + F \cosh kx. \quad (52)$$

Die freien Konstanten C, D, E, F errechnen sich aus den Anfangsbedingungen des schwingenden Elements, die noch unbekannte Konstante k wird aus den Randbedingungen bestimmt.

Die Zeitfunktion G(t) erhält man aus

$$\ddot{G}(t) + \frac{1}{\beta}(4\alpha^4 + k_n^4)\, G(t) = 0 \quad (53)$$

zu

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\sqrt{\frac{1}{\beta}(4\alpha^4 + k_n^4)}\,.t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\sqrt{\frac{1}{\beta}(4\alpha^4 + k_n^4)}\,.t$$

mit der unendlichen Zahl der Eigenfrequenzen

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{\beta}(4\alpha^4 + k_n^4)} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \quad (54)$$

Zur Bestimmung der Konstanten k_n und somit der Eigenfrequenzen ω_n sei der Fall des Elements mit zwei freien Enden erläutert, für welchen die Randbedingungen gelten:

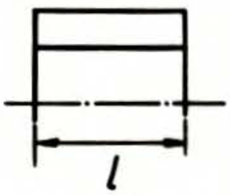
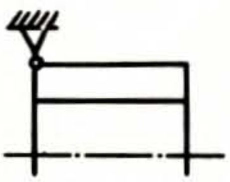
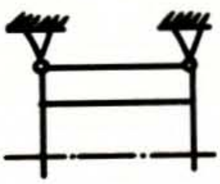
Biegemoment	M_x	$= -Kw'' = -KF''(x).G(t)$
Querkraft	F_{Q_x}	$= M_x' = -KF'''(x).G(t)$

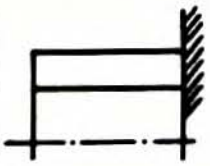
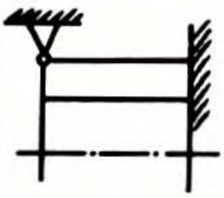
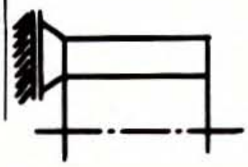
$$
\begin{array}{llll}
x=o: & M_x(o) = -KF''(o)G(t) = o & F''(o) = o & \\
 & F_{Q_x}(o) = -KF'''(o)G(t) = o & F'''(o) = o & (55) \\
x=l: & M_x(l) = -KF''(l)\cdot G(t) = o & F''(l) = o & \\
 & F_{Q_x}(l) = -KF'''(l)\cdot G(t) = o & F'''(l) = o &
\end{array}
$$

Leitet man (52) zwei- bzw. dreimal nach x ab und setzt diese Ableitungen nach (55) Null, so erhält man die Bestimmungsgleichung für k_n

$$\cos(kl)\cosh(kl) = 1\,. \tag{56}$$

Die Herleitung der Bestimmungsgleichungen für alle denkbaren Randbedingungen ist entsprechend, eine Auswahl ist in Tab. 1 zusammengefaßt.

Fall	Randbedingungen	Bestimmungsgleichung	Lösungen
1		$\cos(kl)\cosh(kl) = 1$	$(kl)_n = 0 \quad 4{,}73 \approx \frac{5\pi}{2} \approx \frac{7\pi}{2} \ldots$
2		$\tan(kl) = \tanh(kl)$	$(kl)_n = 0 \approx \frac{5\pi}{4} \approx \frac{9\pi}{4} \approx \frac{13\pi}{4} \ldots$
3		$\sin(kl)\ \sinh(kl) = 0$ $(kl) \neq 0$	$(kl)_n = \pi \quad 2\pi \quad 3\pi \ldots$

Fall	Randbedingungen	Bestimmungsgleichung	Lösungen
4		$\cos(kl)\,\cosh(kl) = -1$	$(kl)_n = 1{,}875 \quad \approx \frac{3\pi}{2} \quad \approx \frac{5\pi}{2} \; \ldots$
5		$\cos(kl)\,\cosh(kl) = 1$ $(kl) \neq 0$	$(kl)_n = 4{,}73 \quad \approx \frac{5\pi}{2} \quad \approx \frac{7\pi}{2} \; \ldots$
6		$\tan(kl) = \tanh(kl)$ $(kl) \neq 0$	$(kl)_n = \; \approx \frac{5\pi}{4} \quad \approx \frac{9\pi}{4} \quad \approx \frac{13\pi}{4} \; \ldots$
7		$\tan(kl) = -\tanh(kl)$	$(kl)_n = 0 \quad 2{,}365 \quad \approx \frac{7\pi}{4} \quad \approx \frac{11\pi}{4} \; \ldots$

Tab. 1: Lösungen für k als Funktion der Randbedingungen für rotationssymmetrische Schalenschwingungen

Mit den Lösungen k_n für k erhält man für alle Randbedingungen (Einspannverhältnisse) die Eigenfrequenzen aus (54) zu

$$\omega_n = \sqrt{\frac{E}{\varrho R^2}\left[1 + \frac{R^2 h^2}{12(1-\nu^2)}(kl)_n^4\right]}\,. \tag{57}$$

Zur Veranschaulichung der Gleichung (48) für die Stabschwingungsformen und der Gleichung (57) für die Schalenschwingungsformen sollen beide für den Fall 7 der Tab. 1 grafisch dargestellt werden. Fall 7 dient als Vergleich zwischen der analytischen und der numerischen Rechnung mit finiten Elementen.

Die Gleichungen (48) und (57) werden umgeformt zu einer dimensionslosen Eigenfrequenz

$$\omega_{n\,Stab} \frac{R}{\sqrt{E/\varrho}} = \left(\omega_n \frac{R}{a}\right)_{Stab} = \frac{R}{L}\,(kl)_n = \frac{(kl)_{n\,Stab}}{L^*} \tag{58}$$

$$\omega_{n\,Schale} \frac{R}{\sqrt{E/\varrho}} = \left(\omega_n \frac{R}{a}\right)_{Schale} = \sqrt{1 + \frac{(h/R)^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{R}{l}\right)^4 (kl)_n^4} = \sqrt{1 + \beta \left[\frac{(kl)_{n\,Schale}}{L^*}\right]^4} \tag{59}$$

mit

$\beta = \dfrac{(h/R)^2}{12(1-\nu^2)}$ Parameter abhängig von den Abmessungen

$L^* = \dfrac{L}{R}$ Verhältnis Länge zu Radius als unabhängige Variable.

Der Parameter β wird für die willkürlich gewählten Werte $h = 1.8$ cm, $R = 30$ cm, $\nu = 0$ zu $3.0 \cdot 10^{-4}$ bestimmt. Damit und mit den Werten für $(kl)_{n\ Schale}$ und $(kl)_{n\ Stab}$ wurden in Abb. 13 die jeweils 5 ersten Eigenfrequenzen über der dimensionslosen Länge L^* aufgetragen.

Die Ortsfunktion F(x) der Schalenschwingungsformen erhält man aus (52) unter Beachtung der Randbedingungen des Falls 7 zu

$$F_n(x) = \frac{e^{(kl)_n} \cos\left[(kl)_n \frac{x}{L}\right]}{-\sin(kl)_n + \cos(kl)_n} + \cosh\left[(kl)_n \frac{x}{L}\right]. \tag{60}$$

Gleichung (60) ist für die ersten 8 Eigenfrequenzen in Abb. 14 dargestellt. Da $\frac{X}{L}$ für alle denkbaren Abmessungen zwischen 0 und 1 liegt und auch $(kl)_n$ unabhängig von der Geometrie ist, gilt (60) allgemein, die Ortsfunktion ist also geometrieunabhängig und nur eine Funktion der Randbedingungen (Einspannverhältnisse).

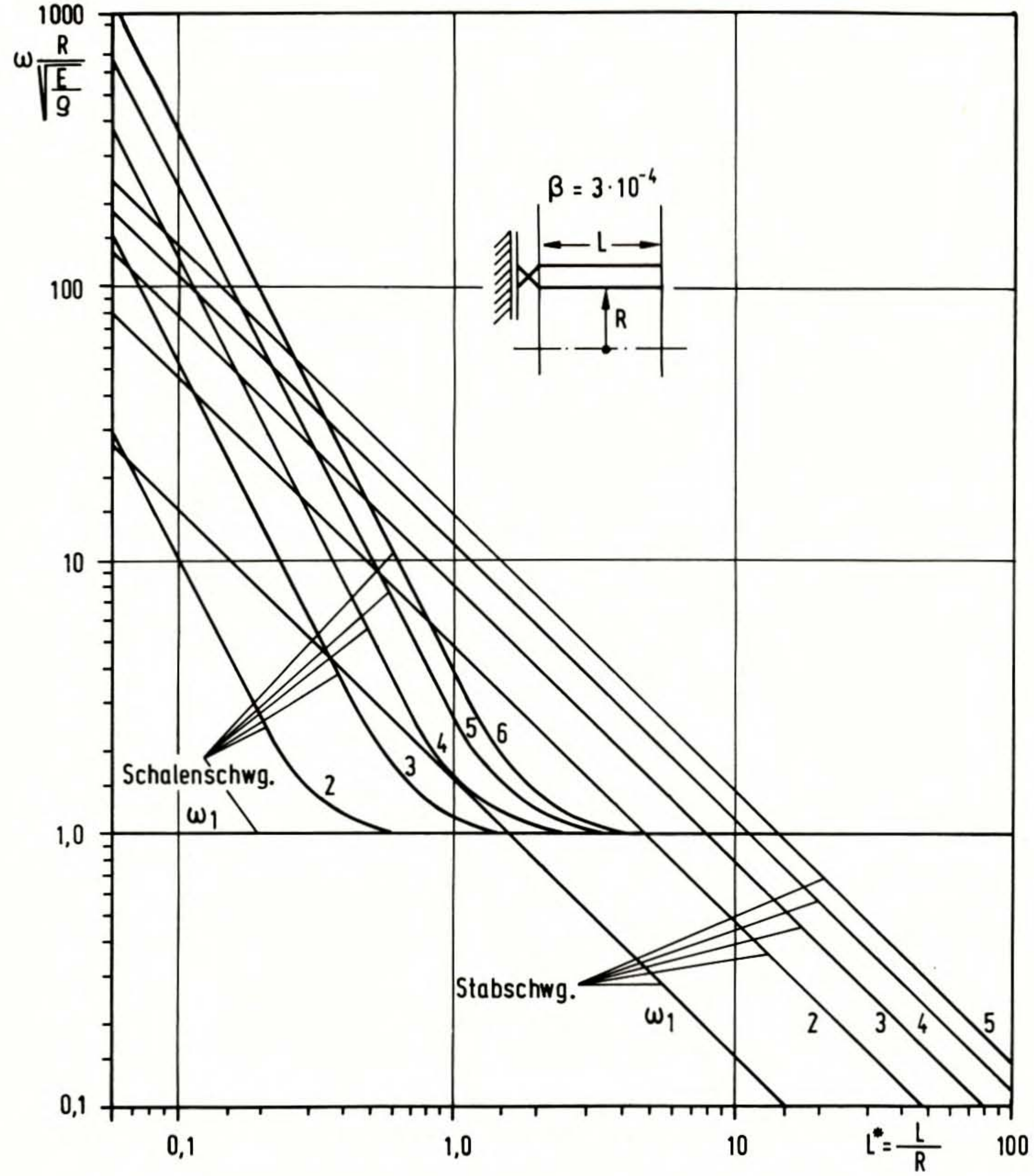


Abb.13: Dimensionslose Eigenfrequenz $\omega \frac{R}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}}$ als Funktion der dimensionslosen Länge L^*

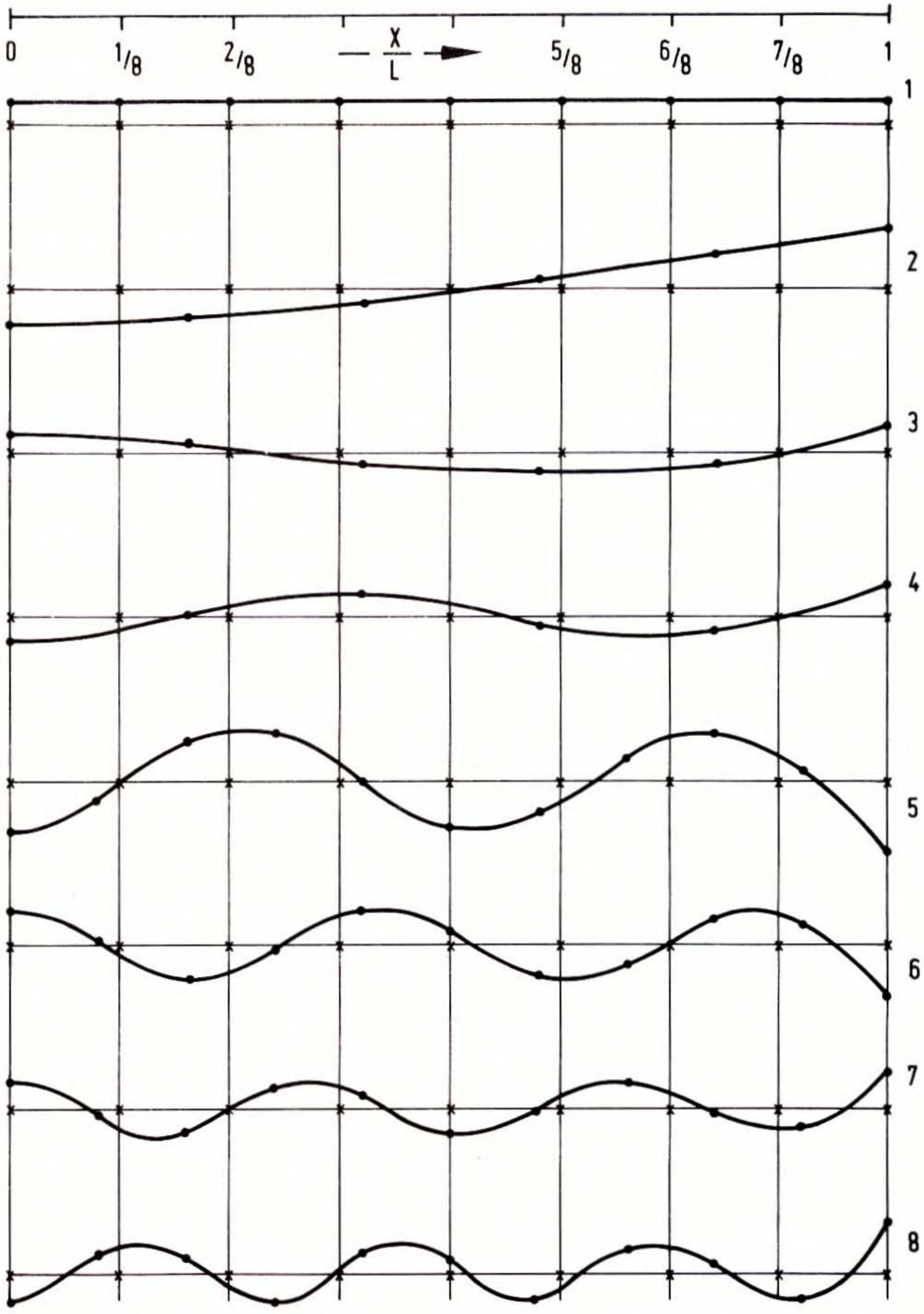


Abb. 14: Ortsfunktion F (x) der Schalenschwingung

4. VERGLEICH DER ANALYTIK MIT DER FINITE-ELEMENTE-RECHNUNG

Für den Fall der in Abb. 11 dargestellten Einspannverhältnisse und für die Materialdaten und Abmessungen

R = 3o cm Innenradius

h = 1.8 cm Wandstärke

$E = 1.85 \cdot 10^6$ kp/cm^2 Elastizitätsmodul

$\varrho = 0.8 \cdot 10^{-5} \frac{kps^2}{cm^4}$ Dichte

$p = 1$ kp/cm^2 Differenzdruck zwischen innen und außen

ν = 0.0 bzw. 0.3 Querkontraktionszahl,

werden in diesem Kapitel für die dimensionslosen Längen

$L^* = L/R = 0.1;\ 1.0$ und 10.0

Vergleiche zwischen den analytischen Berechnungen und den Ergebnissen einer Finite-Elemente-Berechnung mit ROTSYM durchgeführt. Zu diesem Zweck wird die betrachtete Rohr-(Zylinder-) Geometrie der drei dimensionslosen Längen L^* für die statische und die dynamische Rechnung aus 2, 4 und 8 gleichartigen finiten Elementen aufgebaut. Diese Art der Diskretisierung ist in Abb. 15 veranschaulicht.

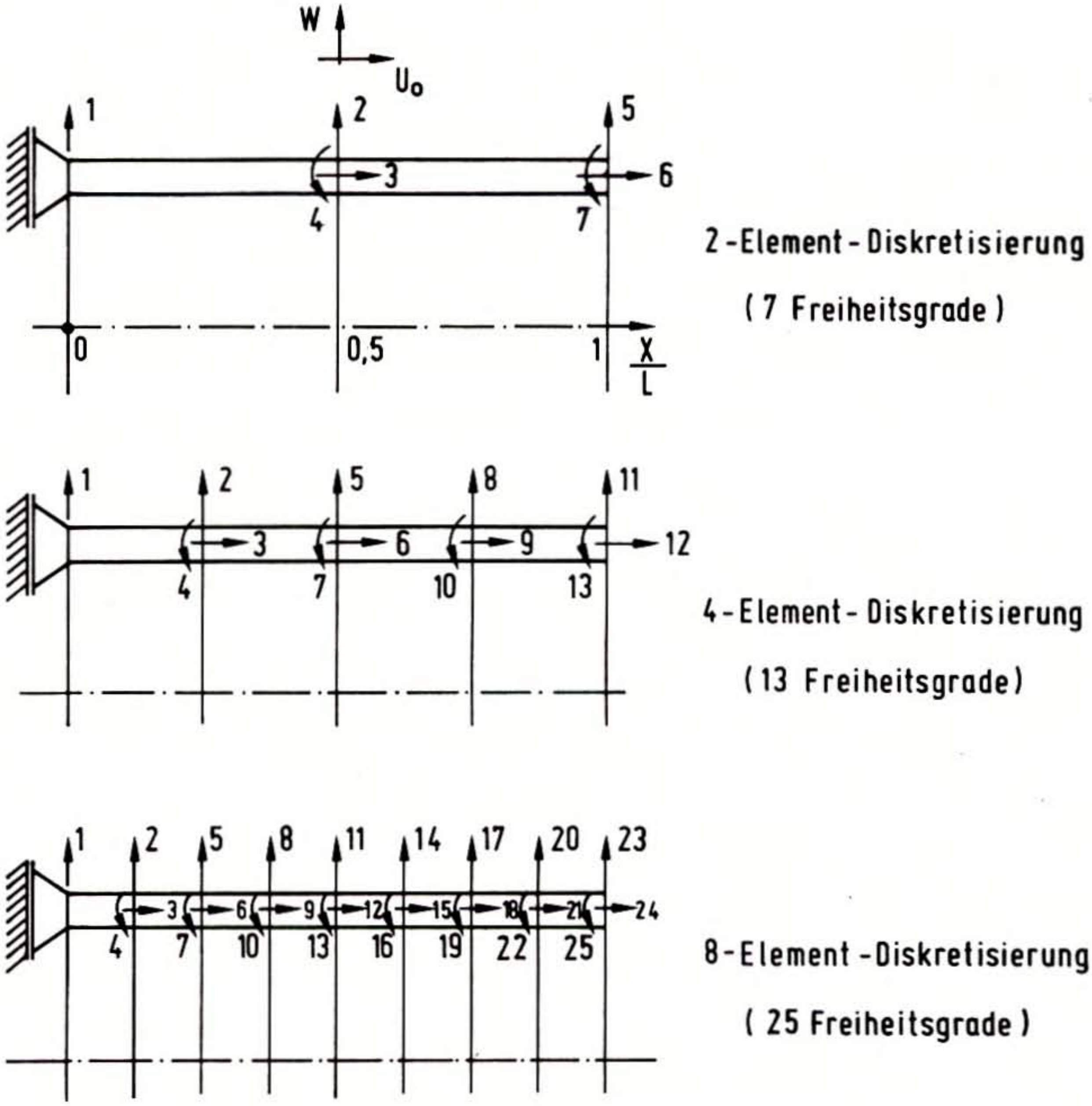


Abb. 15: Diskretisierung der Zylindergeometrie

4.1 Statische Verformung unter Innendruck

Für die gewählten Daten liefert die analytische Rechnung die Werte nach Gleichung (40) zu

$$w = 2{,}7027 \cdot 10^{-4}\,\text{cm} = \text{konstant über } \tfrac{x}{L}$$

$$w_o' = 0$$

$$\begin{aligned} u_o\left(\tfrac{x}{L}\right) &= -8{,}1081 \cdot 10^{-6}\,\tfrac{x}{L}\ \text{cm} \quad \text{für } L^* = 0{,}1 \\ &= -8{,}1081 \cdot 10^{-5}\,\tfrac{x}{L}\ \text{cm} \quad \text{für } L^* = 1{,}0 \\ &= -8{,}1081 \cdot 10^{-4}\,\tfrac{x}{L}\ \text{cm} \quad \text{für } L^* = 10{,}0. \end{aligned}$$

Dabei entspricht w den Freiheitsgraden

1, 2, 5 bzw. 1, 2, 5, 8, 11, bzw,
1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23,

w' den Freiheitsgraden
4, 7 bzw. 4, 7, 10, 13 bzw.
4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25,

$u_o(x)$ den Freiheitsgraden
3, 6 bzw. 3, 6, 9, 12 bzw.
3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24

in Abb. 15.

Die numerische Rechnung liefert für alle Fälle von L^* und die Zahl der finiten Elemente bei 5 ausgeworfenen signifikanten Stellen exakte Ergebnisse!

4.2 Dynamisches Eigenverhalten

Wie bereits weiter vorne angedeutet, werden die Eigenfrequenzen und Eigenformen für $\nu = 0$ berechnet, um sie mit den analytisch ermittelten zu vergleichen. Ein Unterschied ist noch zu beachten, die analytische Berechnung geht davon aus, daß das Trägheitsverhalten nur durch translatorische Bewegungen bestimmt wird, ein Einfluß der Rotationsträgheit wurde vernachlässigt, vgl. (42). In der numerischen Rechnung ist jedoch die Rotationsträgheit infolge des speziellen Verschiebungsansatzes $w(x)$, $w'(x)$ und $u_o(x)$ enthalten. Neben den vom Prinzip der finiten Elemente herrührenden Abweichungen zwischen Analytik und Numerik kann auch die verschiedene Berücksichtigung der Rotationsträgheit zu zusätzlichen Unterschieden führen.

In den Abb. 16 bis 20 sind neben den 8 ersten Eigenfrequenzen die dazugehörigen Eigenformen für die 8-Element-Diskretisierung dargestellt, und zwar für alle 3 Werte von L/R, für $\nu = 0$ und $\nu = 0.3$. Die Stabschwingungsformen sind bei $\nu = 0$ 2-fach dargestellt, einmal in ihrer natürlichen Vorkommensweise (durchgezogen) und einmal senkrecht über der Elementlänge (strichliert), um den Sinuscharakter, der auch durch (49) gegeben ist, zu verdeutlichen. Die Abweichung der Eigenfrequenzen von den analytischen Werten ist in Abb. 21 dargestellt, wiederum für alle Werte von L/R und für die 2-, 4- und 8-Element-Diskretisierung.

Abb. 16, für L/R = 0.1, zeigt eine völlige Übereinstimmung der Eigenfrequenzen und Eigenformen für $\nu = 0$ und $\nu = 0.3$. Dies ist verständlich, da bei diesem extrem kurzen Ring die Trägheitsverkopplung zwischen Längs- und Querverschiebungen klein ist. Die Eigenformen entsprechen sehr genau den analytisch bestimmten in Abb. 14. Die Genauigkeit ist, siehe Abb. 21, sehr hoch, und zwar auch für die 4-Element und mit Einschränkung auch noch für die 2-Element-Diskretisierung. Bemerkenswert, daß die Genauigkeit des Schalenverhaltens wesentlich höher ist als die des Stabverhaltens.

Abb. 17 und 18 zeigen die entsprechenden Verhältnisse für L/R = 1. Auch hier wieder für $\nu = 0$ eine sehr genaue Übereinstimmung der Eigenformen. Für $\nu = 0.3$ ist bereits eine deutliche Frequenzverschiebung und zum Teil auch eine Veränderung der Eigenformen feststellbar. Auch der Fehler ist, abgesehen von der extremen 2-Element-Diskretisierung, als klein anzusehen.

Abb. 19 und 20 zeigen letztlich die entsprechenden Zusammenhänge für das Längenverhältnis L/R = 10. Die Stabeigenformen (nur die ersten 3 aufgetragen) entsprechen sehr gut den analytischen, wie überhaupt der Fehler der Eigenfrequenz der Stabformen vom Verhältnis L/R unabhängig ist. Die Frequenzabweichungen gegenüber der Analytik sind hier schon relativ stark, was mehrere Gründe hat:

Neben der bei L/R = 10 schon recht groben Diskretisierung mit nur 8 Elementen äußert sich das Zusammenfallen aller Schalenfrequenzen (Abb. 13) als numerisch ungünstig. Weiters ist denkbar, daß die Rotationsträgheit, die in der analytischen Berechnung vernachlässigt wurde, mehr an Einfluß gewinnt und somit korrekte Abweichungen von den analytischen Werten auftreten. Diese Vermutung wird dadurch erhärtet, daß auch bei Verwendung von 16 Elementen nur eine unwesentliche Änderung der Eigenwerte auftritt. Da die Eigenfrequenzen relativ stark von den analytischen Werten abweichen, sind auch die Eigenformen relativ stark abgewichen. Insbesondere fallen die Form der Ordnungsziffern 4 und 5 (Abb. 19) aus dem Rahmen, bei den Nr. 6 bis 8 fällt die Amplitude am rechten Ende auf ca. Null ab, im Gegensatz zu den analytischen Werten. Bei $\nu = 0.3$ (Abb. 20) ist eine starke Verkopplung der Längs- und Queranteile in den Eigenformen festzustellen, dies ist bei den vorliegenden Abmessungen auch zu erwarten.

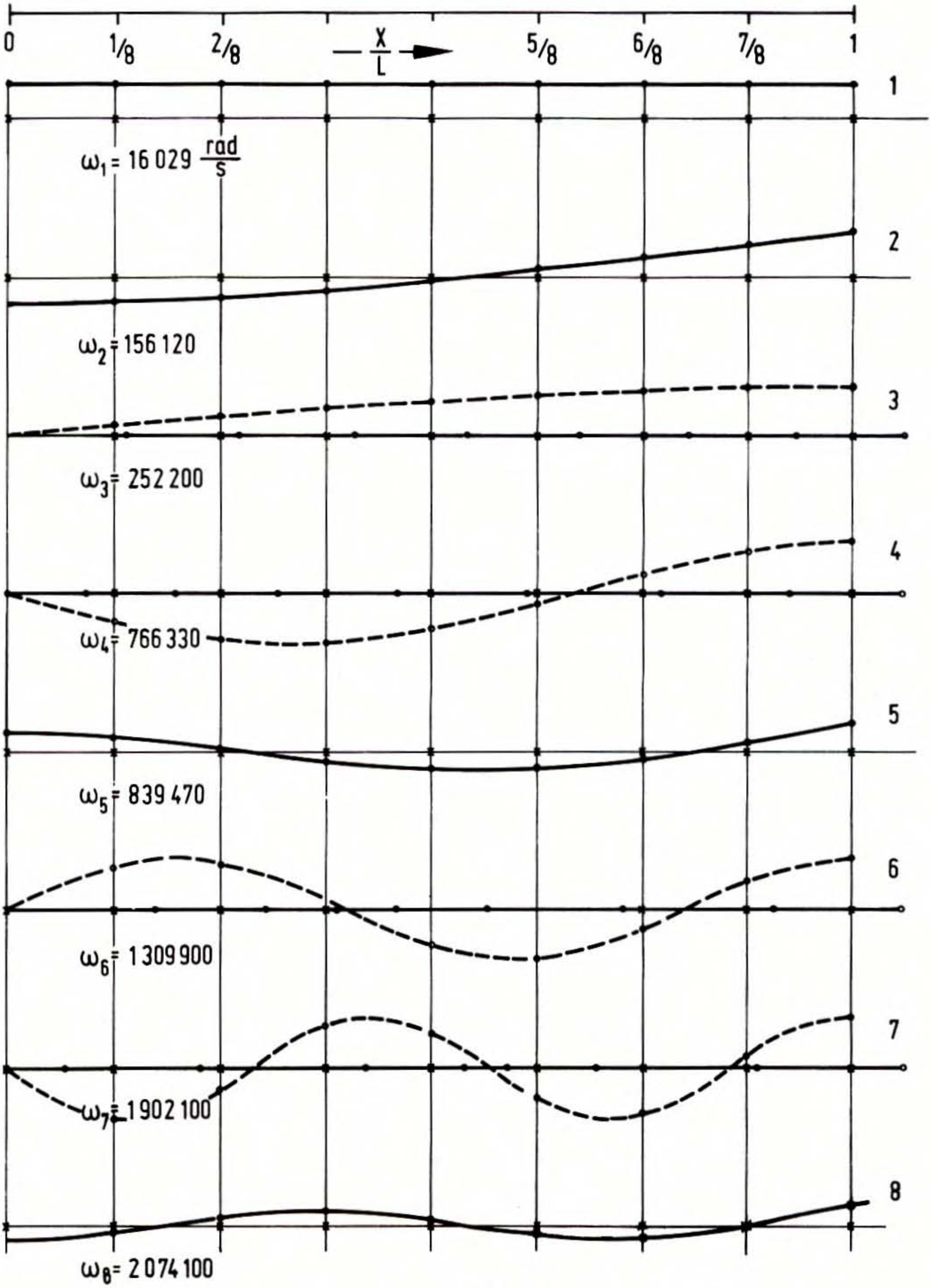


Abb. 16: Eigenformen $\underbrace{\nu = 0{,}0 \quad \nu = 0{,}3}_{\approx}$ $\frac{L}{R} = 0{,}1$; **8 Elemente**

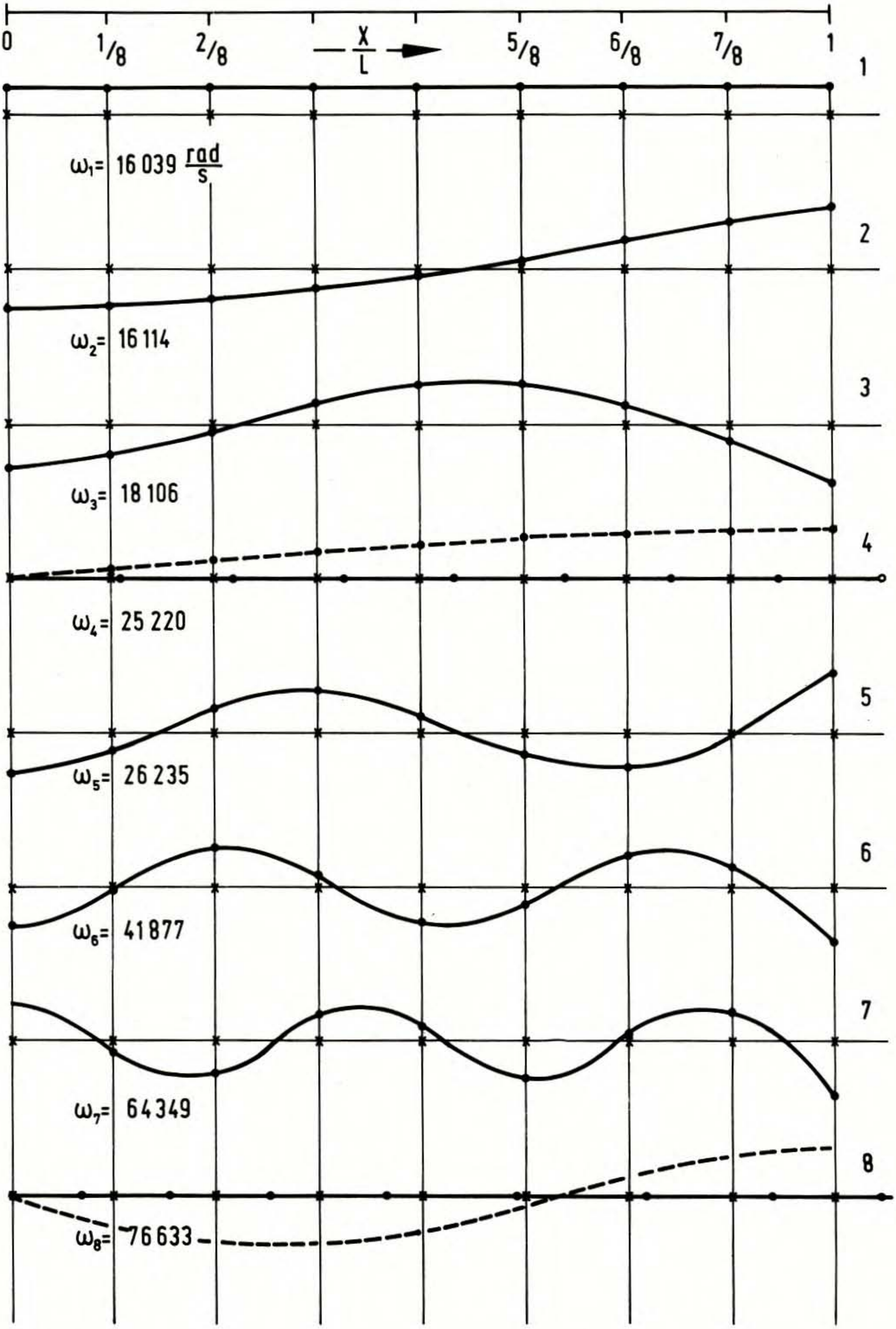


Abb. 17: Eigenformen $\nu = 0{,}0$; $\frac{L}{R} = 1{,}0$; 8 Elemente

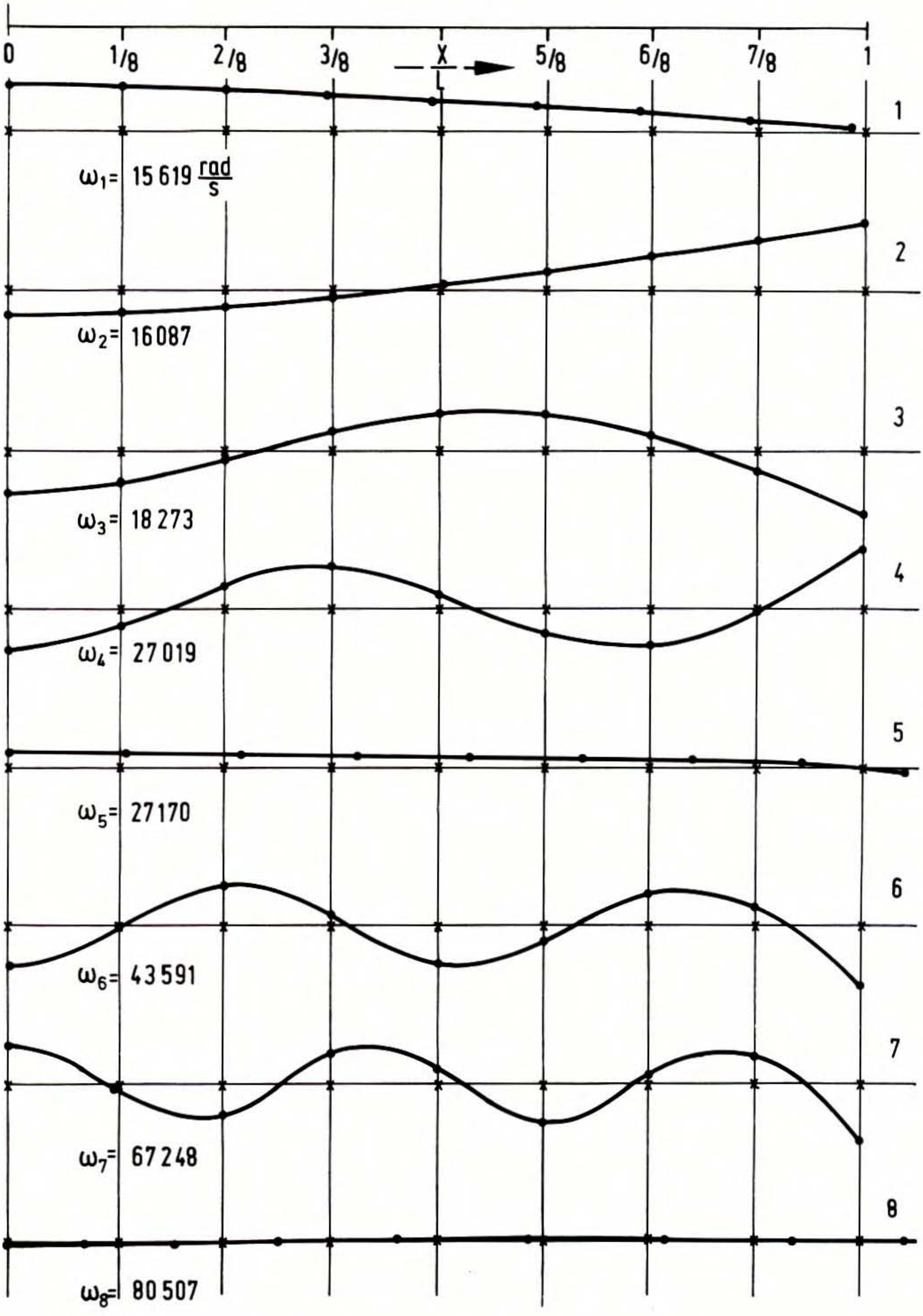


Abb. 18: Eigenformen $\nu = 0,3$; $\frac{L}{R} = 1,0$; 8 Elemente

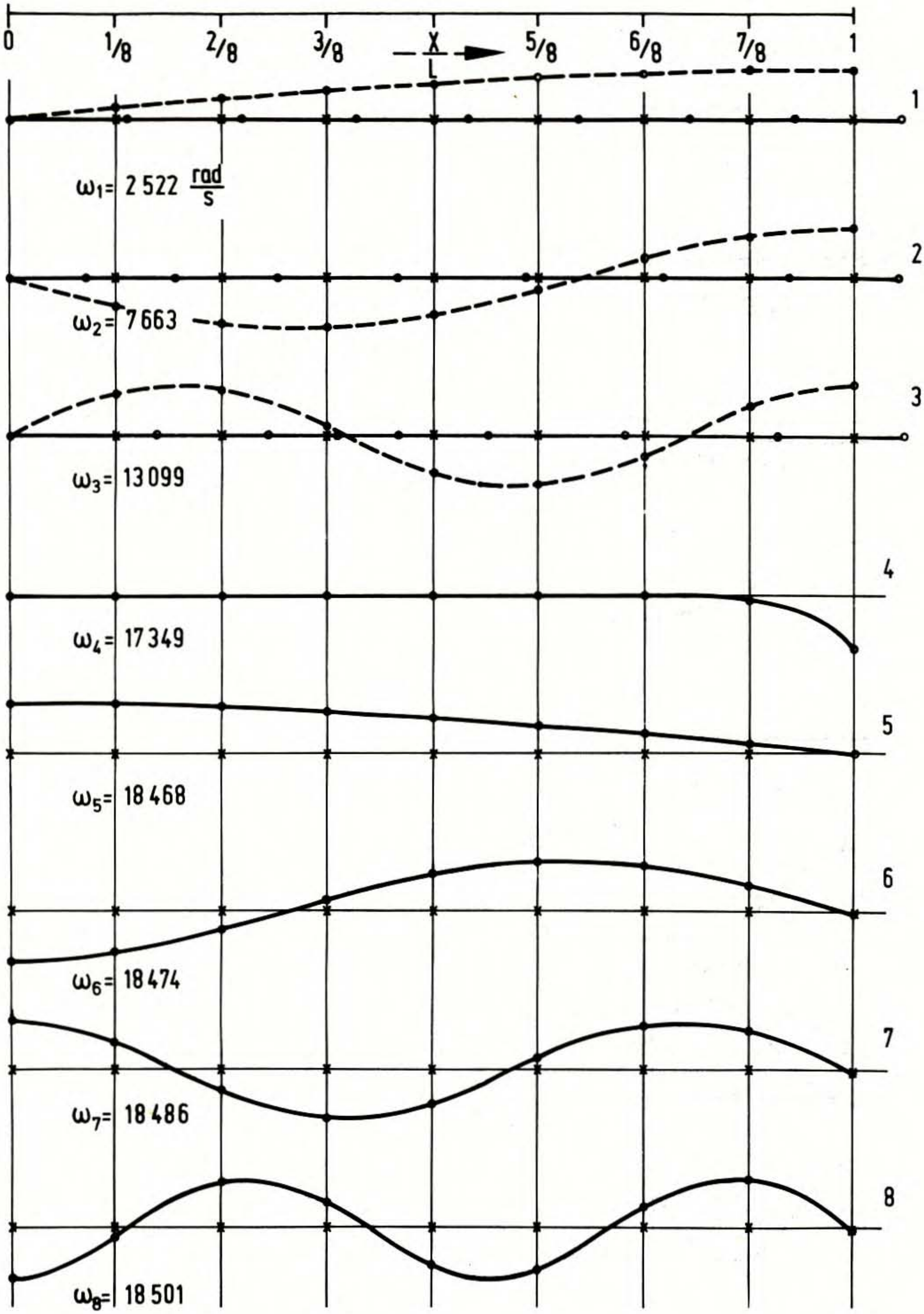


Abb. 19 : Eigenformen $\nu = 0{,}0$; $\frac{L}{R} = 10{,}0$; 8 Elemente

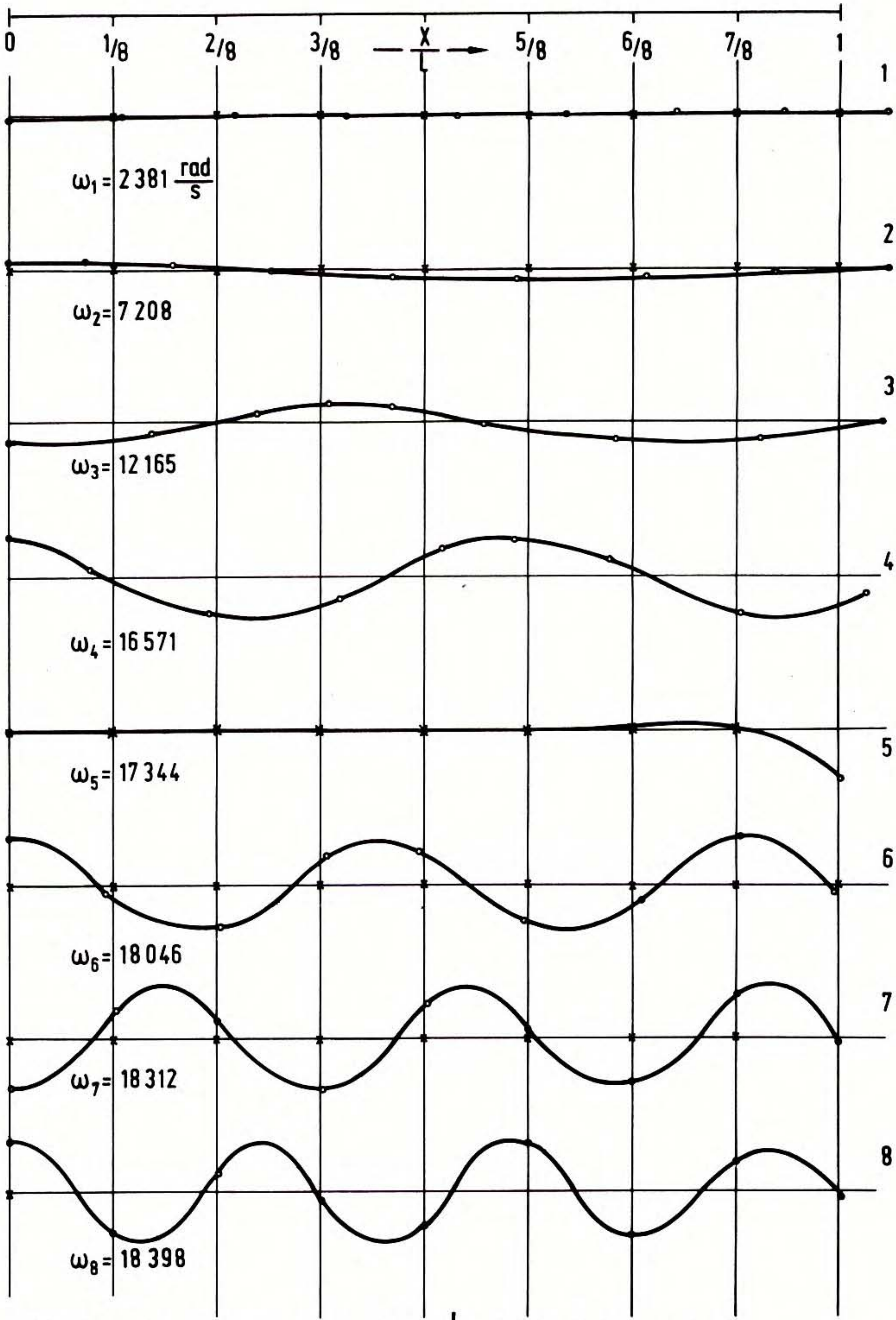


Abb. 20: Eigenformen $\nu = 0{,}3$; $\frac{L}{R} = 10{,}0$; 8 Elemente

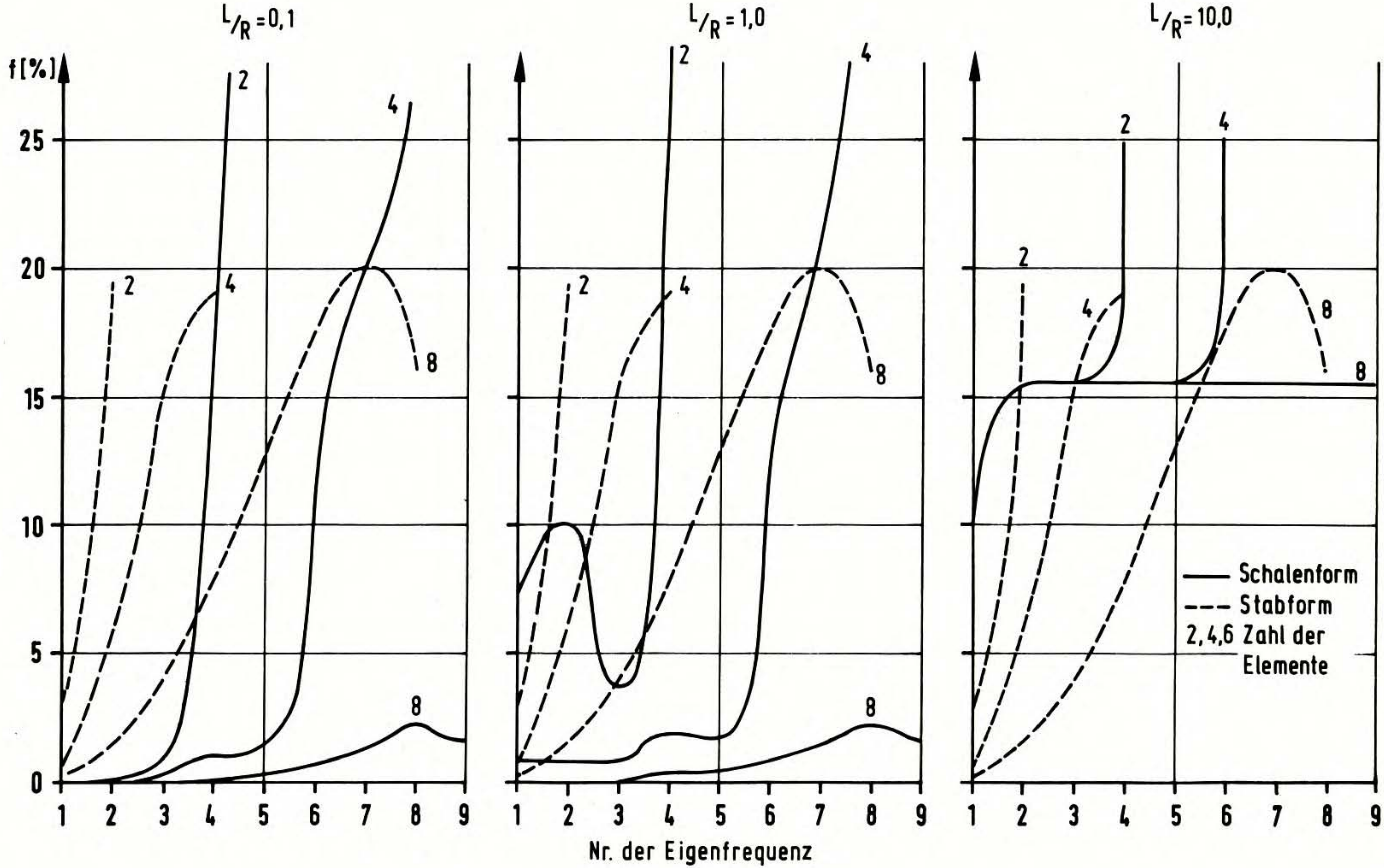


Abb. 21: Abweichung der Eigenfrequenzen gegenüber der Analytik

5. VERGLEICH DES FINITEN ELEMENTS MIT SAPIV-ELEMENT

Das in diesem Bericht hergeleitete finite Element ROTSYM soll verglichen werden mit dem eines handelsüblichen Finite-Elemente-Strukturdynamik-Codes. Zur Verfügung stand das Programm SAPIV /7/, dessen Element Nr. 4 sich als rotationssymmetrisches, druckbelastetes Schalenelement verwenden läßt. Das Elementverhalten wird beschrieben durch die Knotenpunktverschiebungen am Innen- und Außenrand, die gewählte Diskretisierung durch 2, 4 und 8 Elemente ist in Abb. 22 dargestellt.

5.1 Statische Verformung unter Innendruck

Das Verhalten der Struktur wird nicht durch die Verformung der Wandstärkenmittellinie (wie bei ROTSYM) beschrieben, daher gelten auch etwas andere Formeln zur Beschreibung der statischen Verschiebung. Nach der Theorie der dicken Schalen /5/ läßt sich für den vorliegenden, einfachen Lastfall herleiten:

$$w_i = \frac{1}{E}\,\frac{R_i}{R_a^2-R_i^2}\left[R_i^2(1-\nu)+R_a^2(1+\nu)\right]p$$

$$w_a = \frac{2}{E}\,\frac{R_i^2 R_a}{R_a^2-R_i^2}\,p \qquad (61)$$

$$u_0(x) \approx -\nu\frac{1}{2}(w_i+w_a)\,x$$

mit

R_i Innenradius

R_a Außenradius

x Längenkoordinate

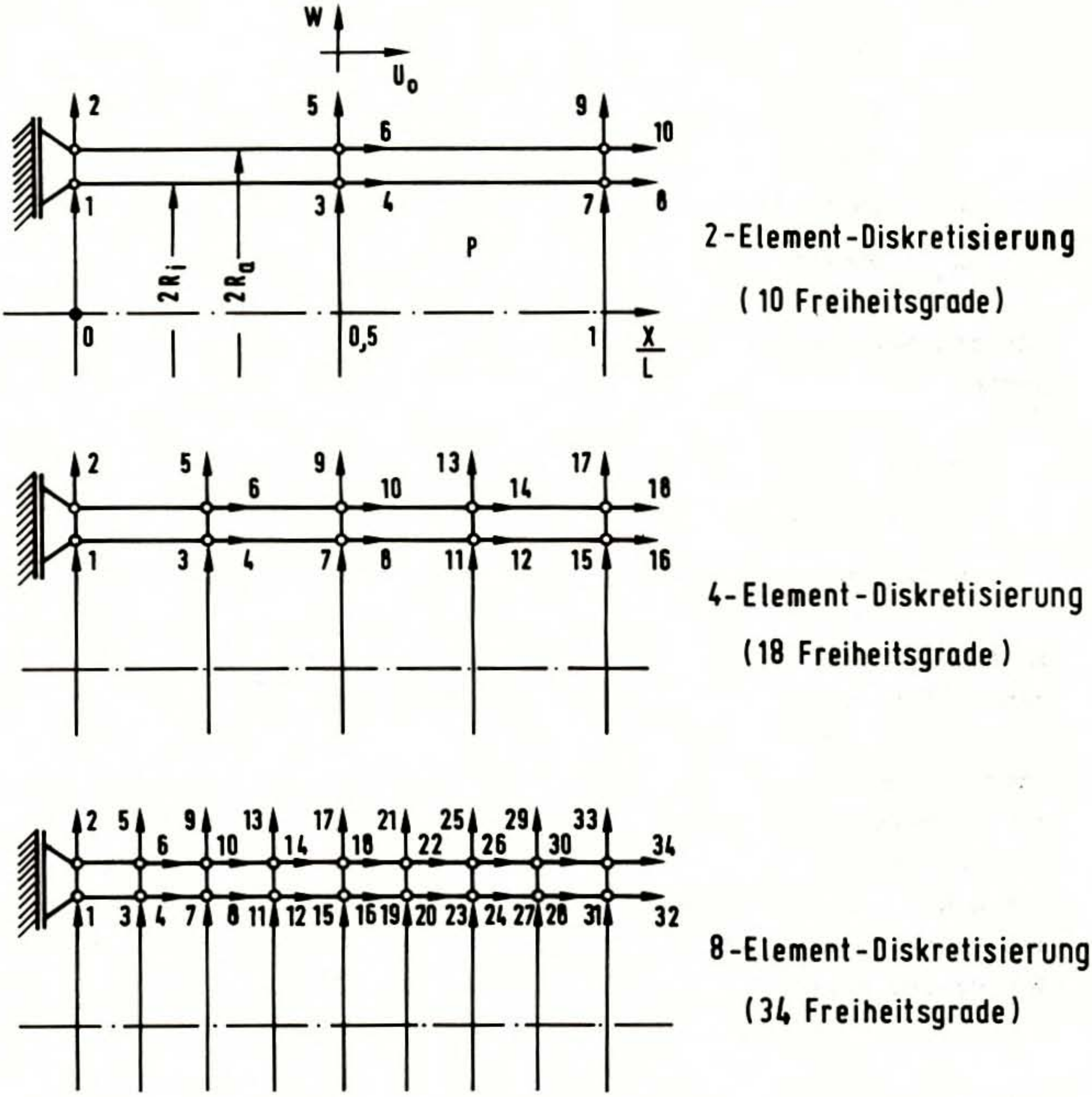


Abb. 22: Diskretisierung des Zylinderelementes in SAP IV

E Elastizitätsmodul

ν Querkontraktionszahl

p Differenzdruck = konstant über x

u_o mittlere Längsverschiebung (Längsverschiebung der Wandstärkemittellinie)

w_i Querverschiebung an der Innenkante

w_a Querverschiebung an der Außenkante

Für die gewählten Geometriedaten ergeben sich die Zahlenwerte

$$\begin{aligned} w_i &= 2.8348\cdot 10^{-4} \text{ cm} \\ w_a &= 2.7814\cdot 10^{-4} \text{ cm} \\ u_o(x) &\approx -8.4243\cdot 10^{-5} x \text{ cm.} \end{aligned} \tag{62}$$

In Abb. 23 sind die Abweichungen der SAPIV-Rechnung von den Werten (62) für die dimensionslosen Längen $L^* = 0.1$; 1.0 und 10.0 für jeweils 2, 4 oder 8 Elemente über der Rohrlänge aufgetragen. Die Fehler an der Innen- und Außenkante sind nahezu identisch, daher nur 1 Kurve für die Querverformung. Da der Fehler der Längsverschiebung nur näherungsweise gilt, ist er weniger als absolut, sondern vielmehr als relativ zu verstehen. Im Gegensatz zu ROTSYM nimmt hier der Fehler stark mit dem Längenverhältnis L^* zu.

5.2 Dynamisches Eigenverhalten

Eigenfrequenzen und Eigenformen wurden mit denselben Daten wie in Kap. 4.2 berechnet. Eine entkoppelte Berechnung von Stab- und Schalenformen mit $\nu = 0$ ist hier nicht möglich und es kann somit auch keine Abweichung von analytisch bestimmten Werten wie im Kap. 4.2 errechnet werden. Zu Ver-

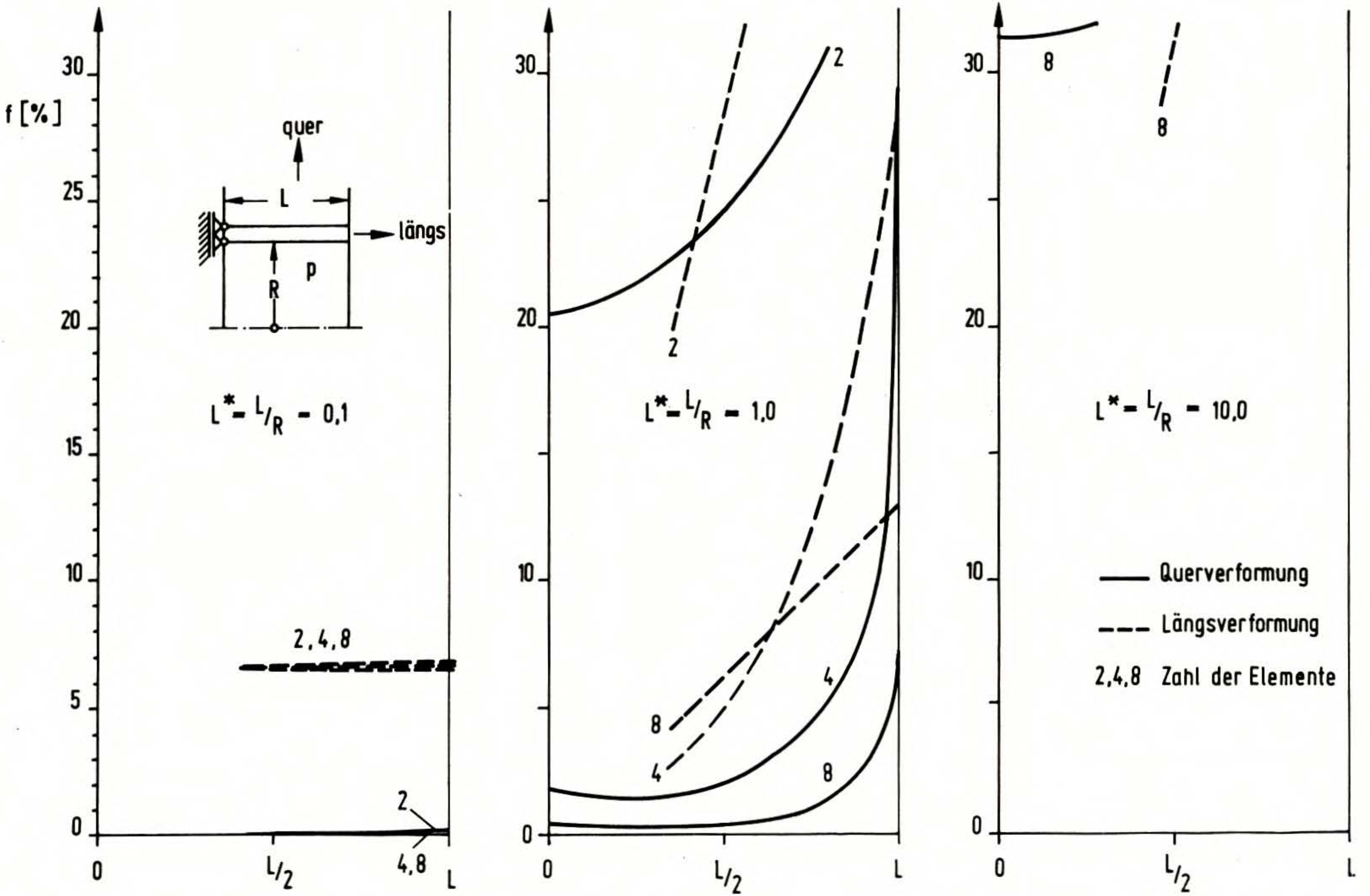


Abb. 23: Fehler der statischen Verschiebung des SAP IV - Elementes

gleichszwecken sind in Tab. 2 die jeweils ersten 10 (falls vorhanden) Eigenfrequenzen von SAPIV und ROTSYM nebeneinandergestellt. Bei der 2-Element-Diskretisierung von ROTSYM existieren nur 7 Eigenfrequenzen, die SAPIV-Rechnung liefert nicht immer die Gesamtzahl der vorhandenen Eigenfrequenzen, dies hängt vom Verfahren (Determinantensuchmethode) und der im Rechner zur Verfügung stehenden Stellenzahl ab und ist insbesondere für die Berechnung erregter Schwingungen nach der Methode der "Time History Modal Analysis" sehr ungünstig.

Man erkennt, daß bei $L^* = 1.0$ und 4 bzw. 8 Elementen die Übereinstimmung recht gut ist, bei allen anderen Fällen nicht. Das SAPIV-Element arbeitet nicht nach der Theorie der biegesteifen dünnen Schalen, sondern vielmehr ähnlich der Theorie der dicken Schalen, trotzdem müßten die Ergebnisse bei der gewählten Geometrie ähnlich sein, da die Theorie der dicken Schalen bei der Berechnung dünner Schalen nicht versagt, sondern die dünne Schale als Sonderfall der dicken Schale zu verstehen ist.

Ob nun die SAPIV-Ergebnisse sinnvoll oder nicht sind, kann an den zugehörigen Eigenformen abgeschätzt werden: Nimmt der Grad der Verformung mit steigender Ordnungszahl zu, so sind die Eigenformen zumindest qualitativ richtig und die Eigenfrequenzen können als akzeptabel betrachtet werden. Zu diesem Zweck sind für $L^* = 0.1$;, 1.0 und 10 die ersten 8 Eigenfrequenzen und Eigenformen für die 8-Element-Diskretisierung in den Abb. 24, 25 und 26 dargestellt. Die durchgezogene Linie stellt die Verformung der Innenkante, die strichlierte die der Außenkante dar. Die gedachte gemittelte Verformung entspricht der Verformung der Wandstärkenmittellinie und ist mit den Ergebnissen von ROTSYM vergleichbar.

L^*	0.1					
	ROTSYM			SAPIV		
Elemente	2	4	8	2	4	8
Eigenfrequenz [rad/s]	16.027	16.027	16.027	15.560	15.560	15.560
	163.750	163.580	163.570	99.530	106.300	108.200
	270.830	265.700	264.430	252.000	256.300	257.400
	886.760	837.950	803.300	308.000	323.400	323.400
	945.980	881.790	880.030	323.400	331.900	335.500
	2.544.000	1.522.300	1.373.200	417.800	366.700	339.200
	6.570.000	2.195.300	1.993.900	435.600	448.600	367.500
		2.201.700	2.174.300	467.800	483.500	410.500
		4.094.400	2.679.400	615.900		455.400
		7.231.000	3.417.100			

Tab. 2: Vergleich der Eigenfrequenz

L^*	1.0					
	ROTSYM			SAPIV		
Elemente	2	4	8	2	4	8
Eigenfrequenz [rad/s]	16.823	15.722	15.619	9.387	13.320	15.120
	17.178	16.202	16.087	14.930	15.120	15.230
	18.898	18.423	18.273	20.010	16.750	17.050
	27.660	27.319	27.019	26.350	26.170	24.790
	33.925	27.415	27.170	63.020	26.880	27.010
	72.352	44.116	43.591	142.600	53.750	39.140
	102.150	74.917	67.248	308.500	75.370	58.820
		83.991	80.507	323.400	114.400	78.240
		116.140	97.682	493.000	116.900	82.930
		152.680	134.910	616.600	138.900	

Tab. 2: Vergleich der Eigenfrequenz -Forts.-

L^*	10.0					
	ROTSYM			SAPIV		
Elemente	2	4	8	2	4	8
Eigenfrequenz [rad/s]	2.326	2.280	2.279	2.456	2.502	2.512
	8.127	7.176	6.902	5.625	6.977	7.355
	17.345	12.940	11.668	6.005	7.454	7.701
	18.160	17.331	16.121	7.740	10.490	11.420
	18.427	17.931	17.341	9.596	10.580	13.150
	32.032	18.646	17.960	206.600	10.990	13.750
	41.850	18.653	18.290	313.600	11.780	14.060
		18.692	18.392	323.400	11.850	14.230
		19.320	18.429	462.900	13.070	14.460
		32.028	18.877	568.300	15.990	15.040

Tab. 2: Vergleich der Eigenfrequenz -Forts.-

Abb. 24 zeigt eine gute Übereinstimmung der Eigenformen 1, 2, 3 und 6 mit den Eigenformen 1, 2, 3 und 5 von ROTSYM in Abb. 16. Die Eigenformen 4, 5, 7 und 8 müssen aber als äußerst unwahrscheinlich angesehen werden, wenn man die Abmessungen bei $L^* = L/R = 0.1$ berücksichtigt.

Abb. 25 zeigt eine sehr gute Übereinstimmung aller Eigenformen mit Abb. 18, nur sind die Eigenformen 1 und 2 vertauscht.

Abb. 26 zeigt ebenfalls eine teilweise gute Übereinstimmung mit Abb. 20, jedoch ist auch hier die Reihenfolge nicht vertretbar.

Das SAPIV-Element liefert für $L^* = 1.0$ die besten Ergebnisse, die anderen Längen, besonders $L^* = 0.1$, erscheinen bedenklich, so daß die ROTSYM-Ergebnisse als besser zu bewerten sind. Bei Verwendung von mehr Elementen lassen sich aber sicherlich auch in SAPIV bessere Ergebnisse erzielen.

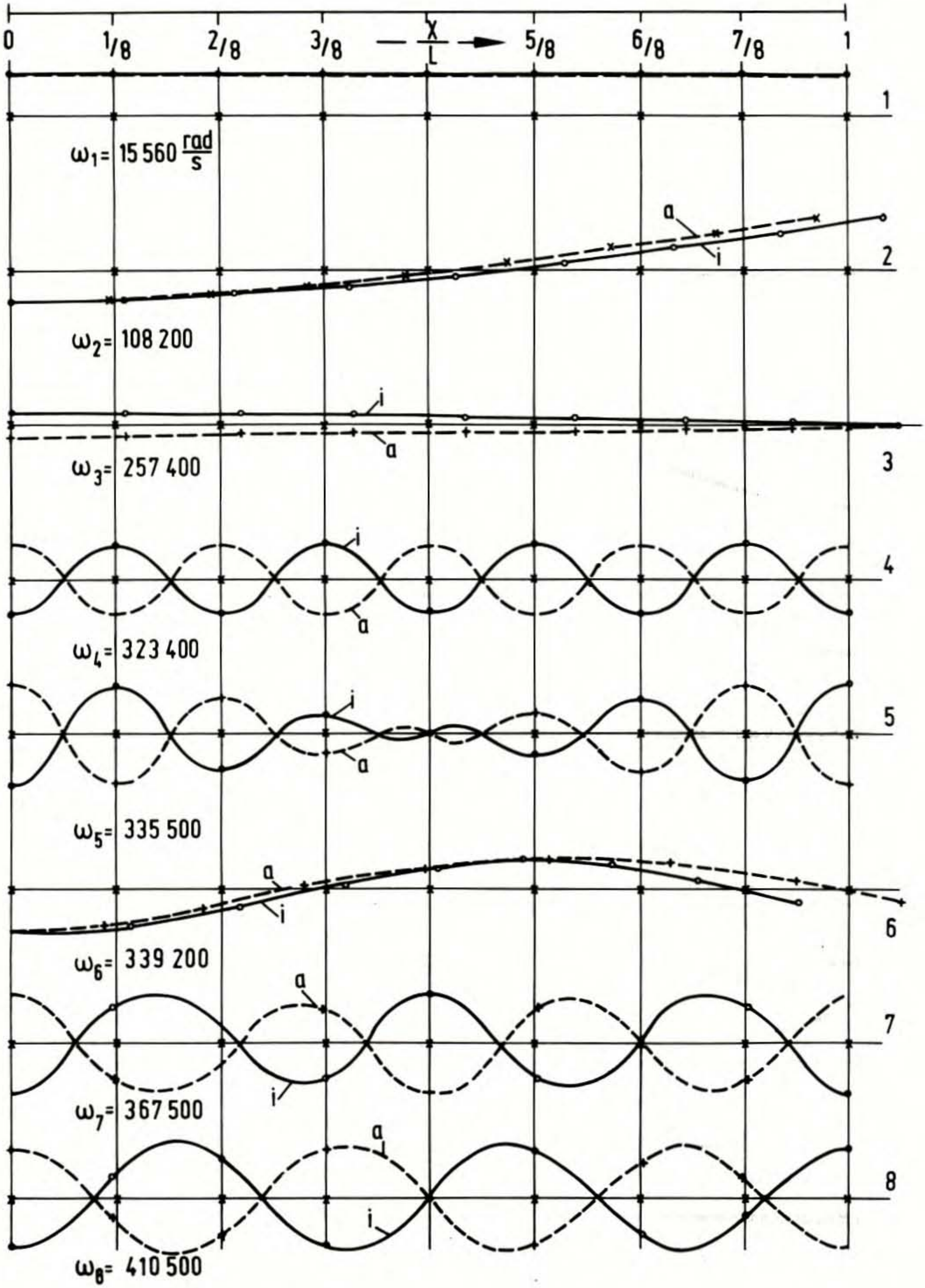


Abb. 24: SAP IV - Eigenformen $\nu = 0{,}3$; $\frac{L}{R} = 0{,}1$; 8 Elemente

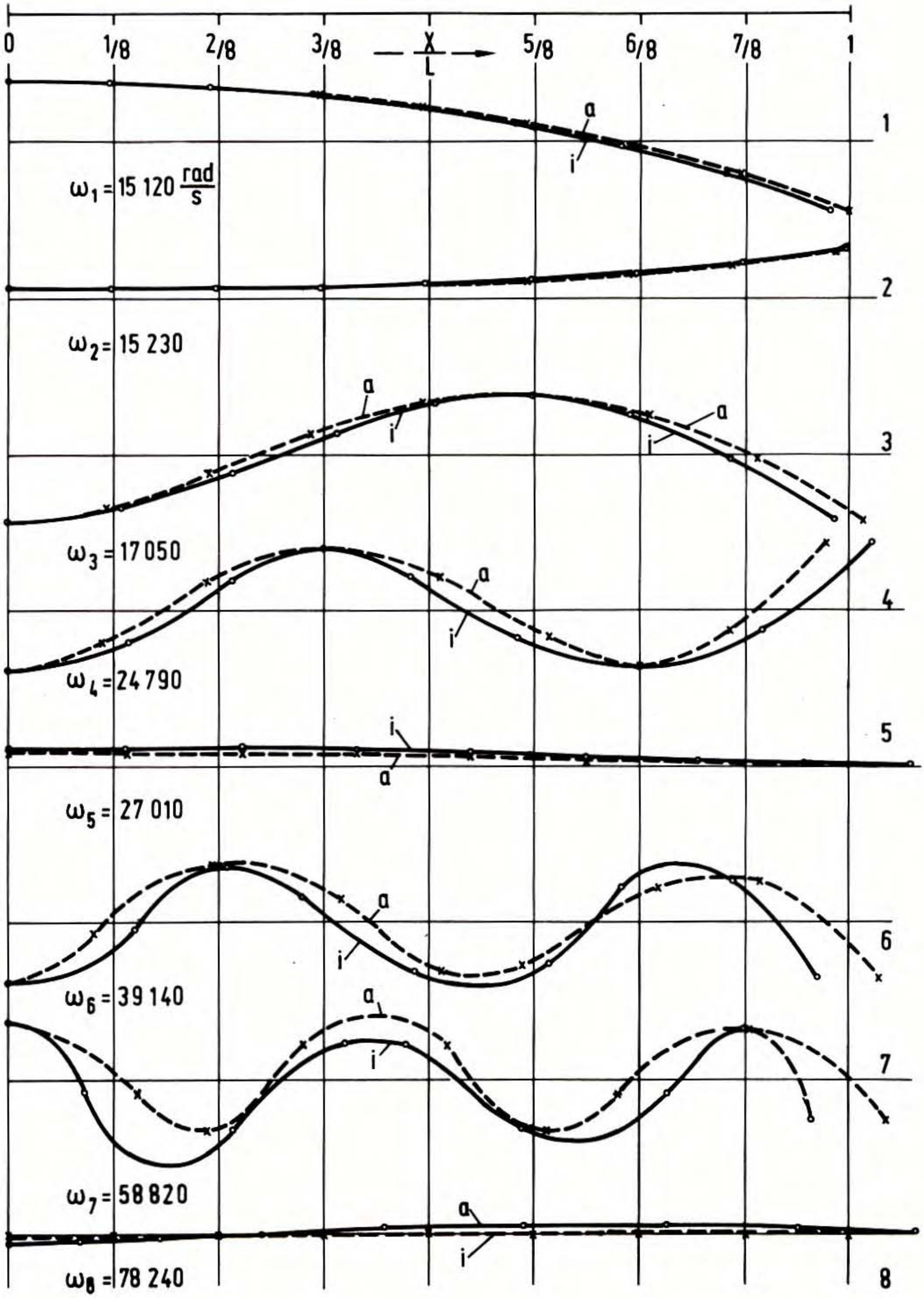


Abb. 25 : SAP IV - Eigenformen $\nu = 0,3$; $\frac{L}{R} = 1,0$; 8 Elemente

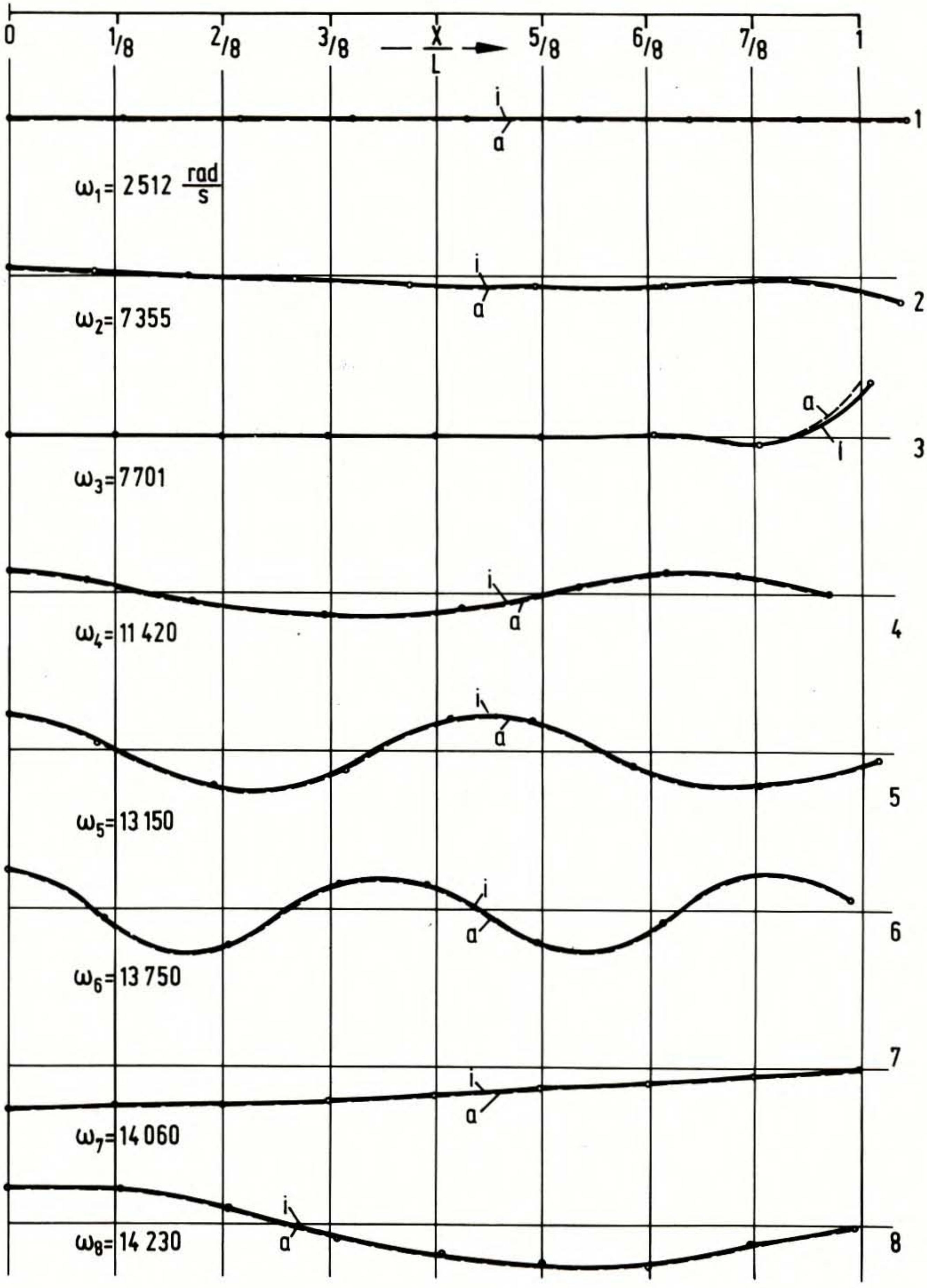


Abb. 26: SAP IV - Eigenformen $\nu = 0,3$; $\frac{L}{R} = 10,0$; 8 Elemente

6. ZUSAMMENFASSUNG

Ein statisch exaktes, rotationssymmetrisches finites Schalenelement (ROTSYM) wurde hergeleitet, dessen Genauigkeit durch die Verwendung der statisch exakten Verschiebungsfunktion als Ausgangspunkt für die Matrizenzusammenhänge entsteht. Die Leistungsfähigkeit des Elementes wurde mit analytischen Ergebnissen (soweit solche vorliegen) verglichen und als sehr gut befunden, und zwar nicht nur bei statischen, sondern auch bei dynamischen Problemen. Ein Vergleich mit dem Element Nr. 4 der SAPIV-Element-Bibliothek zeigt, daß insbesondere bei statischen, aber auch bei dynamischen Problemen unter Verwendung der gleichen Anzahl von Elementen ROTSYM wesentlich bessere Ergebnisse liefert.

ROTSYM hat sich auch in der Rechenpraxis bei der Berechnung von postulierten Kernkraftwerksunfällen sehr gut bewährt, insbesondere deshalb, weil relativ wenige Elemente für eine Diskretisierung der Struktur ausreichen.

7. LITERATURVERZEICHNIS

/1/ J.S. Przemienicki
Theory of Matrix Structural Analysis
McGraw-Hill, New York (1968)

/2/ O.C. Zienkiewicz
The Finite Element Method in Engineering Science
McGraw-Hill, London (1971)

/3/ T. Grillenberger, B. Österle
A Novel Technique of Calculating Fluiddynamic Phenomena
with Respect to Structural Feedback
Vortrag B2/5, 4th International Conference on Structural
Mechanics in Reactor Technology, San Francisco,
August 1977

/4/ H. Göldner
Leitfaden der Technischen Mechanik
VEB Fachbuchverlag, Leipzig (1973)

/5/ S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger
Theory of Plates and Shells
McGraw-Hill, New York (1959)

/6/ Shock and Vibration Handbook
McGraw-Hill, New York (1961)

/7/ K.-J. Bathe et. al.
SAPIV - Beschreibung und Benutzerhandbuch
Deutsche Übersetzung der Ruhr-Universität Bochum
Oktober 1975, Mittelung Nr. 75-14